Elekes György

KOMBINATORIKA FELADATOK

(Második, bővített kiadás)

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2000.

E feladatgyűjtemény elsőrendű célja: segítséget nyújtani az ELTE matematikus, alkalmazott matematikus, programozó matematikus és matematika tanár szakos hallgatói számára a „Véges matematika” tárgy tanulásához.

A feladatgyűjtemények összeállítóit mindenképpen befolyásolja egyéni preferenciájuk: mit tartanak szépnek, érdekesnek és fontosnak. Ez alól magam sem lehetek kivétel. Mégis igyekeztem úgy összeválogatni a témákat, hogy amilyen mértékben csak lehet, fedjék az említett négy szak pillanatnyi kombinatorika anyagát. Ezen túlmenően azonban figyelembe kellett vennem más szempontokat is.

Már a korábbi változatok írása közben felhívták figyelmemet arra, hogy nincs hasonló témájú irodalom sem az általános-, sem a középiskolák számára. Ezért egyrészt bevettem teljesen kezdőknek való, bevezető jellegű feladatokat is, hogy a leendő tanárok meríthessenek belőlük, ha maguk is tanítják majd e tárgyat. Másrészt, ugyanezen okból, két részre tagoltam az anyagot: alap- és haladó szintre. Nem azt szándékozom ezzel sugallni, hogy az első részt már általános ill. középiskolában kellene tanítani; mindössze azt a véleményemet juttattam ezzel kifejezésre, hogy egy átlagos középiskolás (vagy akár egy értelmes nyolcadikos) képes az első részben előkerülő gondolatok megértésére és a feladatok megoldására (kivéve esetleg a legnehezebbeket) — remélhetőleg még szórakoztatónak is találva őket.

A nehezebb feladatokat csillaggal jelöltem. Ugyanilyen jelet kaptak azok, amelyeket kénytelen voltam olyan helyre tenni, ahol bizonyos, a megoldásukhoz szükséges előismeretek még hiányoznak. A „Skatulyák, átlagok ...” szakaszban például a gyakorló feladatok nagy részéhez szükséges a binomiális együtthatók ismerete; azért jelöltem őket csillaggal, mert azok csak később kerülnek sorra. Hogy mégis itt szerepelnek, annak az az oka, hogy megoldási módszereik ehhez a szakaszhoz kapcsolódnak; a tanulóknak feladni őket persze csak akkor lehet, ha a binomiális együtthatókat előzőleg már megismerték. Akkor viszont célszerű is ilyen kérdésekkel fűszerezni a néha kissé monoton számolgatásokat. (Mellesleg e problémák közül egyesek a gráfelmélet bizonyos alapvető fejezetei felé kacsingatnak; néhányat később, a megfelelő témák elején viszont is látunk majd.)

Végezetül szeretnék köszönetet mondani azoknak, akik munkámban közvetlenül vagy közvetve segítségemre voltak:

— Házi használatra készült anyagaiból sok érdekes és szép feladatot engedett át Hárs László, Székely László és Recski András. Egy–egy témában Frank András ötletei ill. Szőnyi Tamás feladatsorai bizonyultak igen hasznosnak.

— Simonovits Miklóssal sokáig tanítottunk együtt kombinatorikát (is), írtunk stencilezett jegyzeteket és feladatgyűjteményeket — utóbbiak anyaga képezte jelen összeállítás gerincét.

— Pósa Lajostól, gondosan összeválogatott és egymásra épített feladatsoraiból (melyekből bőven merítettem) sokat tanultam arról, hogyan érdemes kombinatorikát — és általában matematikát — tanítani.

— Utoljára hagytam T. Sós Verát, akinek a legtöbbet köszönhetek: ő szerettette meg velem a kombinatorikát. Aki hallotta őt valaha előadni, aki tapasztalta, hogyan tudja kibontani a gondolatokban rejlő szépségeket, megérti, miért egyike ő azoknak, akik körül a már régen világhírű magyar kombinatorikai iskola mai generációja felnőtt.

Tartalomjegyzék

I. RÉSZ

amit a középiskolából talán már ismersz (de az se baj, ha még nem).

1. fejezet

Leszámlálás I.

Hányféle sorrendben helyezhetjük el az $\{a, b, c\}$ elemeket?

		b	c	$\leftarrow$ ez az $\{a, b, c\}$ sorrend
	a			
		c	b	$\leftarrow$ ez az $\{a, c, b\}$ sorrend
		a	c	$\leftarrow$ ez a $\{b, a, c\}$ sorrend
•	b			
		c	a	$\leftarrow$ ez a $\{b, c, a\}$ sorrend
		a	b	$\leftarrow$ ez a $\{c, a, b\}$ sorrend
	c			
		b	a	$\leftarrow$ ez a $\{c, b, a\}$ sorrend

Az ábra szerint a lehetőségeket olyan fa reprezentálja, amelyik először három felé ágazik, aztán kétfelé, végül már csak egy ágat hajt. A lehetőségek száma: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

DEF. Az $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ szorzatot a továbbiakban az n után írt felkiáltójelel jelöljük: $n!$ és n **faktoriálisnak** nevezzük.

A következő feladatokban elég, ha azt vizsgáljuk, melyik lépésben hányfelé ágazik a lehetőségek fája.

1. Hány különböző autó–rendszám készíthető (három betűből és három számjegyből)? $\rightarrow$
2. Hány pontosan hatjegyű szám van a tízes számrendszerben,
   a) ha valódi hatjegyű szám nem kezdődhet 0–val?
   b) És ha még azt is megköveteljük, hogy ne legyen 10–zel osztható? $\rightarrow$
3. Hányféle lehetséges sorrendje van n elemnek? $\rightarrow$
4. Hányféleképpen festhetjük egy n–emeletes ház szintjeit fehérre, drappra és barnára, ha szomszédos szintek nem lehetnek egyszínűek? $\rightarrow$

5. Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt és jegyzőt választ.
   a) Hányféleképpen tehetik ezt?
   b) És ha Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni? $\rightarrow$
6. Egy versenyen 57–en indulnak; az újságok az első hat helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? $\rightarrow$
7. n különböző virágot k különböző vázába hányféleképpen oszthatunk el? (Egyes vázák üresek is maradhatnak.)
8. Hány darab $m \times n$–es 0–1-mátrix van? (Elemeik tehát 0–k vagy 1–esek.) $\rightarrow$
9. Hány különböző eredményt kaphatunk, ha tízszer dobunk
   a) dobókockával
   b) pénzdarabbal?
10. Hányan vannak
    a) egy n–elemű halmaz összes részhalmazai?
    b) az n hosszúságú $0-1$–sorozatok?
    c) Miért egyenlő a fenti két eredmény? Mutass kölcsönösen egyértelmű természetes megfeletetést! $\rightarrow$
11. Hányféleképp lehet elhelyezni a sakktáblán 8 bástyát, hogy semelyik kettő se üsse egymást? $\rightarrow$
12. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben az első három jegy azonos az utolsó hárommal? $\rightarrow$
13. Hány $A \mapsto B$ függvény van, ha $|A| = n$ és $|B| = k$? (Itt $|X|$ az X halmaz elemszámát jelöli.) $\rightarrow$
14. Hány $A \mapsto B$ *bijekció* (kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés) van, ha $|A| = |B| = n$? $\rightarrow$
15. Hány $A \mapsto B$ *injekció* (különböző elemekhez különbözőeket rendelő függvény) van, ha $|A| = n$ és $|B| = k$? $\rightarrow$
16. Hány TOTÓ szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen 13 + 1 találatunk? $\rightarrow$

* 17. A ${p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\dots{p_r}^{k_r}$ számnak hány osztója van (1–et és n–et is beleértve)? A p_i–k különböző primeket jelölnek. $\rightarrow$

18. Hányféleképp lehet *középpontosan szimmetrikusan* elhelyezni a sakktáblán 8 bástyát, hogy semelyik kettő se üsse egymást? $\rightarrow$

DEF. n elem összes lehetséges sorrendjei: n **permutációi**. Ezek száma $n!$.

DEF. n elemből az összes lehetséges sorrendben k darab különböző kiválasztása: az n elem k–adosztályú **variációi**. Ezek száma $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = n!/(n-k)!$. (A bal oldalon k szorzótényező szerepel.)
Megjegyzés: A permutáció tehát a variáció speciális esete: $k = n$–re éppen az előbbi fogalomhoz jutunk.

DEF. n elemből képezhető k tagú sorozatok (egy–egy elem többször is szerepelhet): az n elem k–adosztályú **ismétléses variációi**. Ezek száma n^k.

1.1. Dobjuk ki a rosszat!

Egy tipikus hiba (és elkerülése)

Hány olyan (hétjegyű) telefonszám van, amiben van valahol egymás mellett két azonos számjegy? (Tegyük fel, hogy ezek a számok 0–tól 9–ig bármilyen jeggyel kezdődhetnek.)

„Megoldás":

Azok száma, amelyekben az első két jegy azonos: $10 \cdot 1 \cdot 10^5 = 10^6$.

Ugyanígy, ahol az i–edik és $i+1$–edik jegyek azonosak: 10^6. Így az „eredmény": $6 \cdot 10^6$.

Hol a hiba?

Ott, hogy egyeseket, pl. a 11 22 345–öt kétszer számoltuk; a 111 2222–t még többször.

I. Jó megoldás (kicsit bonyolultabb): mindent csak egyszer számolunk.

Jelöljük az i–edik jegyet a_i–vel!

Ha $a_1 = a_2$: $10 \cdot 1 \cdot 10 \ldots 10 = 10^6$.

Ha $a_1 \neq a_2$, de $a_2 = a_3$: $10 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^5$.

.

.

.

Ha $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4 \neq a_5 \neq a_6 = a_7$: $10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 9^5 \cdot 10$.

Eredmény: $10(10^5 + 9 \cdot 10^4 + 9^2 \cdot 10^3 + 9^3 \cdot 10^2 + 9^4 \cdot 10 + 9^5)$.

II. Jó megoldás (sokkal egyszerűbb): **Jó = összes − rossz.**

Összes: 10^7;

Rossz (ha nincs két azonos szomszédos): $10 \cdot 9^6$.

Jó: összes – rossz $= 10^7 - 10 \cdot 9^6 = 10(10^6 - 9^6)$.

19. Hány természetes szám teljesíti az $57 \leq n \leq 157$ feltételt? →

20. Hány hatjegyű természetes szám van? (Ami 0–val kezdődik, az nem hatjegyű.) →

21. Kockával tízszer dobva hány olyan sorozatot kaphatunk, amiben van legalább egy hatos? →

22. Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt, jegyőt és pénztárost választ. Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni. Hányféle lehet a vezetőség? →

1.2. ... és ha többször is megszámoltuk?

23. Kilenc egyforma cédula közül négyre egy–egy **A**–t írunk piros, kék, zöld illetve fekete tintával; a többin a **B,C,D,E** és **F** betűk találhatók feketével.
    a) Hányféleképpen rakhatjuk a cédulákat sorba egymás után?
    b) Szilárd, szegény, színvak; egyáltalán nem tudja megkülönböztetni a színeket. Hány olyan sorrendje van a céduláknak, amikor ő csak azt látja, hogy ABC szerint sorban vannak? És hány olyan, amikor csak a **B A C A D A E A F** sorrendet látja?
    c) Hány sorrendet tud megkülönböztetni Szilárd? →
24. Az előző feladat fekete **B** jelű céduláját három példányra cseréljük: egyik barna, másik lila, a harmadik pedig szürke.
    a) A 11 cédulának hány olyan sorrendje van, amiről Szilárd csak azt látja, hogy ABC–sorrendben vannak?
    b) Hány **C B D B E B F A A A A** típusú van?
    c) Hány sorrendet tud most megkülönböztetni Szilárd?
25. Húsz egyforma cédula közül nyolcra „1”–et, ötre „2”–t és hétre „3”–at írtunk (mindegyiket feketével!). Hányféleképpen rakhatjuk sorba őket? →
26. Egy piros és egy kék dobozba akarunk eltenni 100 különböző tárgyat úgy, hogy mindkettőbe 50–50 jusson. Hány lehetőség van?
27. (folytatás) Mi a válasz, ha egy sárga dobozunk is van, és 150 tárgyat kell (egyenletesen) elosztanunk?
28. n_1 darab 1–est, n_2 darab 2–est, ... , n_k darab k–ast hányféleképpen rakhatunk sorba? →
29. Hányféle anagramma (a betűk sorrendjének megváltoztatásával keletkező, esetleg értelmetlen szó) készíthető a **MATEMATIKA** betűiből?

DEF. k_1 darab 1–es, k_2 darab 2–es, ..., k_n darab n–es lehetséges sorbaállításainak száma a $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ elem **ismétléses permutációi**. Ezek száma:

$$\frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

1.3. Gyakorló feladatok (Hárs László gyűjtéséből)

30. A kanadai irányítószámok XnXnXn alakúak, ahol az X–ek egy–egy (esetleg különböző) betűt, az n–ek egy–egy számjegyet jelentenek. Hány ilyen irányítószám létezhet?

31. Az iskolai atlétika versenyre magasugrásból, távolugrásból, 60 ill. 400 méteres futásból és kislabdadobásból kell egy osztály 27 tanulója közül kiállítani egyet–egyet. Ugyanaz az ember több (akár az összes) sportágban is indulhat. Hányféle lehet a nevezési lista?
32. Hány olyan hatjegyű szám van, amiben nincs egymás mellett két azonos számjegy? →
33. n fiút és n lányt egy sorba akarunk állítani úgy, hogy mindig felváltva egy lány – egy fiú következzen. Hányféleképpen tehetjük ezt? →
34. Hány olyan hétjegyű telefonszám van, amiben van két *szomszédos* azonos számjegy?
35. (folytatás) És ha csak azt követeljük meg, hogy *valahol* legyenek azonosak, de nem feltétlenül egymás mellett? →
36. Hányféleképpen küldhetünk el egy nyáron 29 különböző képeslapot négy ismerősünknek? (Megtehetjük, hogy valaki egyet se kap; akár mindet küldhetjük ugyanannak.)
37. Hány húsztagú *szimmetrikus* $0-1$–sorozat van? (második fele az első tükörképe)
38. Olyan nyolcjegyű számot keresünk, melyet a számjegyei sorrendjének megfordításával keletkező számhoz adva 99.999.999–et kapunk. Hány ilyen van?
39. A vitorlásbajnokságon 37 hajó indult. Fakezű Jancsié eddig mindig utolsónak ért célba; régi vágya, hogy előbbre rukkoljon. A verseny után látjuk, amint széles mosollyal megy hazafelé: sikerült! Hányféle lehetett a befutási sorrend? (Még az sem kizárt, hogy — óriási szerencsével — dobogóra került vagy akár nyert is!)
40. Egy Forma I–es csapatról az a hír járja, hogy első számú versenyzőjüket, **X**–et a másik, **Y** nem előzheti meg, ha **X** az *első* helyen van; sőt, ha *ő* vezet és **X** felzárkózik mögéje, köteles előre engedni. Más helyezésekért — ha nem ők vannak az élen — szabad egymással csatázniuk. Hányféle lehet a sorrend a dobogón (első három hely) egy olyan futamon, ahol huszonnyolcan indulnak?
41. Tíz egyforma csokit, hat egyforma rágógumit és kilenc egyforma jégkrémet osztunk ki 25 gyerek között úgy, hogy mindenki pontosan egyvalamit kapjon. Hányféleképpen tehetjük ezt? →
42. Négy barátomnak 29 különböző képeslapot küldtem: Aladárnak ötöt, Beának nyolcat, Cilinek hetet és Dominak kilencet. Hányféleképpen küldhettem el a lapokat?
43. Hány különböző (nem feltétlenül értelmes) anagramma készíthető a **KARABAH** szó betűiből, ha se az elején, se a végén nem állhat **A** ?
44. * $2n$ különböző magasságú ember hányféleképpen tud két n–hosszúságú sorba állni úgy, hogy az első sorban mindenki alacsonyabb legyen a hátsó sorban a megfelelő helyen állónál? →

Az 52 lapos francia kártyában négy szín (kőr, pikk, káró és treff) mindegyikéből 13 darab van. Minden színből négy *figura*, (ász, király, dáma és bubi), kilenc pedig kettestől tízesig számozott. Négy játékosnak 13-13 lapot osztva természetesen különbözőnek tekintjük, ha nálad van 13 értékesebb és nálam 13 kevésbé jó, vagy ugyanazok a lapok éppen ellenkezőleg helyezkednek el. Az persze közömbös, hogy a pikk ászt előbb kaptad, mint a treff királyt, vagy fordítva.

45. Hány különböző leosztás van? →
46. Hány olyan leosztás van, ahol minden játékosnak van ásza? →
47. Hány olyan leosztás van, amikor minden ász egy kézbe került? →
48. Hány olyan leosztás van, amikor minden figura két, egymással szemben ülő játékoshoz került?
49. Hány olyan leosztás van, amikor minden játékosnak jut minden számból és figurából?
50. Hány olyan leosztás van, ahol két szemben ülő játékosnak összesen csak két színből jut lap?
51. Az 52 lapos francia kártyából 5 lapot osztanak. Hányféleképp lehet nálad
    a) póker [4 egyforma figura vagy szám],
    b) full [2 egyforma + 3 egyforma figura vagy szám],
    c) két pár [2 egyforma + 2 másfajta egyforma figura vagy szám],
    d) sor [5 egymás utáni, nem feltétlen azonos színű figura vagy szám],
    e) csupa treff?
52. Hányféleképpen festhetjük négy különböző színűre egy szabályos tetraéder lapjait, ha az egymásba forgatható példányokból csak egyet–egyet akarunk? •

* 53. (folytatás) Ugyanez a kérdés egy kockával és hat színnel.

* 54. Egy zsákban 10 pár cipő van. Milyen valószínű, hogy ha kiveszünk belőle 6 darabot, lesz köztük egy pár?

* 55. Legyen $n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\ldots{p_r}^{k_r}$. (A p_i -k különböző primeket jelölnek.) Mennyi az n osztóinak szorzata (1–et és n–et is beleértve)? →

* 56. Hány különböző gráf adható meg az $\{1, 2, \ldots, n\}$ pontokon? →

* 57. Hányféle lehet egy ping–pong körmérkőzés eredménye? (Nem a helyezés számít, hanem az, ki kit vert meg és kitől kapott ki; a nyerés aránya közömbös.)

* 58. Ugyanez a kérdés sakk–körmérkőzésre. (Itt döntetlen is van.)

* 59. Mekkora osztály esetén lesz 50% -nál nagyobb valószínűsége, hogy két tanulónak ugyanakkor van a születésnapja?

* 60. Az $1, 2, \ldots, 3n$ számok közül hányféleképp választhatunk ki hármat úgy, hogy az összegük osztható legyen hárommal?

1.4. Skatulyák, átlagok—hányszor számol, aki nem rest?

Három példa — három módszer, amire szükségünk lesz.

A skatulya–elv:

Ha n dobozba $n+1$ golyót teszünk, valamelyikbe legalább kettő kerül. (Hát persze: ha mindegyikbe legfeljebb egy jutna, akkor legfeljebb n golyó lenne.)

Átlagolás:

Ha néhány szám számtani közepe 59, akkor található köztük olyan is, ami legalább 59 és olyan is, ami legfeljebb annyi. (Hát persze: ha pl. mindegyik kisebb lenne, akkor az átlaguk is kisebb volna.)
Igaz–e hasonló állítás pozitív számok mértani vagy harmonikus közepére?

Kettős leszámlálás:

Pistike összeadni tanul. Piros és kék golyók vannak előtte; egy részük kisebb, mások nagyobbak. Megszámolja a pirosakat és a kékeket; majd a kicsiket és a nagyokat. Összeadja az első két számot, aztán a másik kettőt. Csodálkozva látja, hogy a két eredmény azonos.
(Hát persze: mindkettő az összes golyó száma.)

Megjegyzés: a fenti három módszer gyakran egymással kombinálva használható.

A skatulya–elv

61. Hat pár fekete és ugyanannyi kék zoknid — amelyeket, sajnos, *nem* raktál össze párosával — összekeveredett a fiókban. Teljes sötétségben hány darabot kell elővenned a 24–ből, hogy biztosan legyen köztük egy összeillő pár? •
62. (folytatás) És ha egy *kék* párra van szükséged? •
63. Egy dobozban száz golyó van. Közülük
    28 piros
    20 zöld
    12 sárga
    20 kék
    10 fekete
    10 fehér
    Mi a legkisebb darabszám, amennyi golyó között még biztosan lesz 15 egyszínű? $\rightarrow$
64. Mutasd meg, hogy minden társaságban van két ember, akiknek ugyanannyi ismerősük van a jelenlévők között! (Az ismeretségek kölcsönösek.)

** 65. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges 100 darab természetes számból kiválasztható néhány, amelyek összege osztható 100–zal!

66. Egy hatszög oldalait és átlóit (összesen 15 vonalat) tetszőlegesen piros és kék színekkel húztál be. Mutasd meg, hogy
   a) bármely csúcsból indul három egyszínű vonal.
   b) biztosan rajzoltál három egyszínű vonalból álló háromszöget.

67. Igaz–e ugyanez ötszögre? És hét– vagy több oldalúra?

Átlagolás és kettős leszámlálás

68. Ha egy mátrix minden sorában az elemek átlaga legalább 100, akkor van olyan *oszlop* is, ahol az átlag szintén legalább 100.

* 69. Két körlapot vágtunk ki átlátszó fóliából és mindkettőt $2n$ egyforma körcikkre osztottuk. E körcikkeket pirosra és kékre festi valaki, éspedig az egyik lapon n–et pirosra és n–et kékre; a másikon tetszőlegesen. Mutassuk meg, hogy a két körlap egymásra helyezhető úgy, hogy legalább n körcikk kerüljön vele azonos színűre!

70. Legyen H tetszőleges korlátos síkbeli alakzat, melynek területe legalább 10 egység. Daraboljuk fel a síkot vízszintes és függőleges egyenesekkel egységnégyzetekre (képzejük azt, hogy papírból van), és helyezzük egymásra azokat a négyzeteket, amelyekre H–nak legalább egy pontja került. Mutassuk meg, hogy a papírdarabok átdöfhetők egy tűvel úgy, hogy H–nak legalább 10 pontját találjuk el egy szúrással. (Az állítás akkor is igaz, ha a terület 9,1 egység. Miért?)

71. (folytatás) Legyen H tetszőleges korlátos alakzat a síkban; területét jelölje T_H. Mutassuk meg, hogy H eltolható úgy, hogy legalább T_H darab rácspontot tartalmazzon!

72. Egy összejövetelen tízen vettek részt. Érkezéskor

négy	másikkal fogott kezet 5	ember
öt	másikkal fogott kezet 2	ember
hat	másikkal fogott kezet 3	ember

Hány kézfogás történt összesen? →

Gyakorló feladatok

73. Hány mérkőzést játszanak egy n résztvevős kieséses ping–pong versenyen?

* 74. Az 1, 2, ... , 2n számok közül $n + 1$–et kiválasztva
   a) biztosan lesz-e köztük két relatív prím? (azaz olyan, melyek legnagyobb közös osztója 1)
   b) Hát kettő, amelyek közül egyik osztója a másiknak?

75. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges véges halmazok. Jelölje $|A_i|$ az i–edik elemeinek számát, $d(x)$ pedig az x elem *fokát*, vagyis azt, hogy x hány darab A_i–ben van benne. Igazold, hogy $\sum\limits_x d(x) = \sum\limits_i |A_i|$

76. (folytatás) Bizonyítsd be az előző állítást abból is, hogy egy $(a_{i,j})$ mátrixra
$$\sum_i \sum_j a_{i,j} = \sum_j \sum_i a_{i,j},$$
azaz a sorösszegek összege és az oszlopösszegek összege azonos.

77. A síkot $n-1$ darab sokszögre és a kimaradó (végtelen) tartományra osztottuk fel. A darabok rendre $d_1, d_2, \ldots, d_n$ másikkal érintkeznek egy–egy szakasz mentén (két rész közös határa nem állhat egynél több darabból). Hány határ–szakasz van?

** 78. Egy ABC háromszög belsejét kisebb háromszöglapok egyesítére bontottuk úgy, hogy bármely két kis háromszög vagy egy teljes közös oldal mentén, vagy egy csúcsukban érintkezik, vagy egyáltalán nem. (A nagy háromszög oldalaira is eshet kis háromszög csúcsa.) Fessük be az AB oldalon lévő csúcsokat tetszőlegesen pirosra vagy kékre, a BC olalon lévőket kékre vagy sárgára, a CA–ra esőket pedig sárgára vagy pirosra (így A csak piros, B csak kék és C csak sárga lehet); végül az ABC belsejébe esőket is színezzük, bárhogyan. Igazold, hogy a nagy háromszög mellett legalább egy kicsinek is mindhárom csúcsa csupa különböző színt kapott! →

DEF. Egy gráfban *cseresznyé*nek nevezünk két, egy pontból induló élt (azaz egy két élből álló utat, ha úgy tetszik).

* 79. a) Ha G–nek n pontja van, melyekre rendre $d_1, d_2, \ldots d_n$ él illeszkedik, hány cseresznye van G–ben?
   b) n pontú, e élű gráfban legalább hány cseresznye van? →

* 80. Tegyük fel, hogy egy n pontú, e élű gráfban nincs háromszög.
   a) Egy él hány cseresznyében szerepelhet?
   b) Mutasd meg, hogy a gráfban legfeljebb $\dfrac{e(n-2)}{2}$ cseresznye lehet!
   c) Bizonyítsd be, hogy $e \le \frac{n^2}{4}$.

* 81. Tegyük fel, hogy G–ben nincs négy pontú kör! Mutasd meg, hogy G–ben
   a) legfeljebb $\binom{n}{2}$ cseresznye lehet!
   b) $e \le \frac{1}{2} n^{3/2} + \frac{1}{4} n$

* 82. Tizenhét tudós három témáról folytat levelezést egymással (bármely kettő mindig ugyanarról, de egy harmadik írhat nekik különbözőekről). Bizonyítsd be, hogy van köztük három, akik páronként ugyanarról leveleznek!

* 83. Legyen α irracionális szám! Egy egységnyi kerületű kör tetszőleges pontjából indulva mérj fel egymás után α hosszúságú íveket! Bizonyítsd be, hogy a végpontok halmaza sűrű lesz a körvonalon (azaz bármely pozitív hosszúságú ívbe esik végpont). →

1.5. Binomiális együtthatók (Pósa Lajos nyomán)

84. Hányféleképpen lehet sorbarakni két 1–est és $n-2$ db. 0–t? →
85. Egy körmérkőzéses bajnokságon n csapat indul. Mindegyik mindegyikkel játszik egyszer egyikük, egyszer másikuk pályáján. Hány meccsből áll a bajnokság? →
86. Ugyanez a kérdés, ha minden mérkőzést a Népstadionban rendeznek (a nagy érdeklődés miatt), és így persze mindenki mindenkivel csak egyszer játszik.
87. Egy n tagú társaságban mindenki mindenkit kézfogással üdvözölt. Hány kézszorítás történt összesen?
88. Mi köze egymáshoz az előző négy feladatnak?
89. Hányféleképpen lehet sorbarakni három 1–est és $n-3$ db. 0–t? →
90. Az ultit hárman játsszák. Bajnokságot rendezel, ahol az n játékos mindegyike — az esélyegyenlőség jegyében — minden lehetséges két ellenfél ellen asztalhoz ül és játszik egy partit. Összesen hány játszmát játszanak a résztvevők?
91. Módosítsuk a LOTTÓ szabályokat! Tegyük fel, hogy a 90 számból hármat húznak ki. Hány szelvény kell a biztos telitalálathoz?
92. Hány háromelemű részhalmaza van egy n–elemű halmaznak?
93. Mi köze egymáshoz az előző három feladatnak?
94. Hány LOTTÓ szelvényt kell kitöltened, hogy biztos ötös találatod legyen?

A Pascal–háromszög

95. Ismételjünk egy kis elemi algebrát:
    a) $(x+y)^2 = ?$
    b) $(x+y)^3 = ?$
    c) $(x+y)^4 = ?$
    d) Mennyi lesz x^2y^3 együtthatója $(x+y)^5$–ben ?
96. Sorold fel
    a) az $\{a,b,c\}$ halmaz 0,1,2,3–elemű részhalmazait!
    b) az $\{a,b,c,d\}$ halmaz 0,1,2,3,4–elemű részhalmazait! Melyikből hány darab van?
    c) Hány kételemű része van az $\{a,b,c,d,e\}$ halmaznak?
    d) Ezek közül hányban van benne az e? És hányban nincs?

Jelöljük C_k^n–val $x^{n-k}y^k$ együtthatóját $(x+y)^n$–ben! Ezekből a számokból készül a *Pascal–háromszög:*

1	0. sor
1 1	1. sor
1 2 1	2. sor
1 3 3 1	3. sor
1 4 6 4 1	4. sor
1 5 10 10 5 1	5. sor
1 6 15 20 15 6 1	6. sor
1 7 21 35 35 21 7 1 stb.	

97. Mutasd meg, hogy a Pascal–háromszögben minden szám a felette lévő kettő összege, azaz
$$C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$$

Újabb jelölés: $\binom{n}{k}$:= egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma.

98. A fenti definíció szerint
   a) mennyi $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ és $\binom{n}{n}$?
   b) Hát $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, $\binom{n}{n-3}$ és $\binom{n}{n-2}$? •

99. Az $\binom{x}{y}$ jelölést használva írd fel, hány olyan k–elemű része van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak,
   a) amiben az n benne van?
   b) És amiben nincs benne?
   c) Adj kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz k–elemű részei (k rögzített) illetve az $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmaz $k-1$ és k elemű részei között!
   d) Mutasd meg, hogy a részhalmazok számára a C_k^n–khoz hasonló összefüggés igaz:
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
→

100. Mutasd meg, hogy minden $0 \le k \le n$ számpárra $C_k^n = \binom{n}{k}$

101. (folytatás) Igazold, hogy a fenti két mennyiség közös értéke
$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

102. Hányféleképpen olvashatod ki a MATEMATIKA szót a következő ábra bal felső sarkából a jobb alsóig haladva?

```
M A T E M A T
A T E M A T I
T E M A T I K
E M A T I K A
```
•

103. Egy négyzetrács $(0, 0)$ pontjából rácsegyenesek mentén jobbra vagy felfelé lépve hányféleképpen juthatsz el az (u, v) pontba? $(u, v \ge 0)$

A binomiális együtthatók azonosságai

A következő feladatokat próbáljátok C_k^n ill. $\binom{n}{k}$ definícióját használva megoldani. Általában működik az $\binom{n}{k}$–ra vonatkozó közvetlen képlet is; a teljes indukció pedig jól olajozott masinaként ontja a bizonyításokat. Kombinatorikus szemléletünket azonban a *részhalmazos* definíció használata fejleszti legjobban.

104. Mutasd meg, hogy a Pascal–háromszög szimmetrikus!
A fenti instrukció szellemében tehát lásd be, hogy
   a) $(x+y)^n$–ben $x^{n-k}y^k$–nak és x^ky^{n-k}–nak ugyanannyi az együtthatója.
   b) egy n elemű halmaznak ugyanannyi k–elemű része van, ahány $(n-k)$ –elemű.

   Aki ezeken túlmenően explicit képletet és/vagy indukciót is tud használni, az összesen négy bizonyítást ismer majd. →

105. Mennyi $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{k}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$?
(Polinommal is, részhalmazzal is oldd meg!) →

106. Mutasd meg, hogy minden nem-üres halmaznak ugyanannyi páros elemszámú része van, ahány páratlan! →

107. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=\,?$

108. Bizonyítsd be, hogy $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$ →

109. Az $1+i$ komplex szám hatványainak segítségével adj zárt formulát a következő összegekre:
   a) $\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\ldots+(-1)^k\binom{n}{2k}+\ldots$
   b) $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\ldots+(-1)^k\binom{n}{2k-1}+\ldots$

   (Részhalmazos megoldást is keress, legalább néhány speciális típusú n–re!)

Igazold az alábbi azonosságokat!

110. $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

111. $\binom{n}{k}=\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$.

112. $\binom{n}{m}\cdot\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

113. $\frac{4^n}{2n+1}<\binom{2n}{n}<4^n$. →

114. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n}$.

115. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$ →

116. $\sum_k (-1)^k \binom{4m}{2k+1} = 0.$ →

117. $\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$. →

118. $\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r+n}.$

119. $\sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}2^{n-m}.$

* 120. $\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$

121. $\sum_k \binom{r-k}{m}\binom{s+k}{n} = \binom{r+s+1}{m+n+1}.$

122. $\sum_k k\binom{r}{k}\binom{s}{k} = s\binom{r+s-1}{r-1}$.

123. $\sum_k \binom{r-k}{m}\binom{s+k}{s} = \binom{r+s+1}{r-m}$.

* 124. $\sum_k (-1)^k \binom{4m}{2k} = (-4)^m.$

Néhány gyakorló feladat ...

125. Egy évfolyam 50 lány és 30 fiú hallgatója öttagú küldöttséget választ, éspedig három lányt és két fiút. Hányféleképpen tehetik ezt? →

126. (folytatás) Ancsa és Berci éppen haragban vannak; nem akarnak együtt bekerülni. Hányféle lehet a delegáció?

127. Hány szigorúan monoton növő $\{1, 2, \ldots, k\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ függvény van? →

* 128. Egy $r \times r$–es pontrács csúcsaiból hányféleképpen választhatjuk ki egy tengely–párhuzamos téglalap négy csúcsát?

129. Egy trafikban k fajta képeslap kapható. Hányféleképpen küldhetünk belőlük n barátunknak 2–2 különbözőt?

* 130. Egy konvex n–szög semelyik három átlója nem megy át egy ponton. Hány metszéspontjuk van az átlóknak öszesen?

* 131. $2n$ különböző magasságú ember hányféleképpen tud két n–hosszúságú sorba állni úgy, hogy az első sorban mindenki alacsonyabb legyen a hátsó sorban a megfelelő helyen állónál? →

* 132. Három dobókockával dobva a mutatott számok összegét figyeljük. Melyik szám a leggyakoribb?

1.6. Ha egy elem többször is szerepelhet ...

133. Mutass kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést
   a) az 1 és 2 számjegyekből képezhető öttagú monoton növő sorozatok és az 1,2,3,4,5 és 6 jegyekből álló, ugyancsak öttagú *szigorúan* monoton növő sorozatok között!
   b) az n tagú $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(1 \leq a_i \leq k)$ monoton növő és az ugyancsak n tagú $b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(1 \leq b_i \leq k + n - 1)$ *szigorúan* monoton növő sorozatok között!
   c) Mutasd meg, hogy a b) alattiakból $\binom{n+k-1}{n}$ db. van!

134. Melyik készletben van több dominó és miért:
   a) 0–tól 8–ig számozva, duplák is vannak;
   b) 0–tól 9–ig számozva, duplák nincsenek.

135. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben egyik számjegyet sem követ nála kisebb?

136. Egy gyereknek 10 rágógumit akarsz venni; golyó, Donald és lapos van. Hányféleképp válogathatsz? •

DEF. Jelölje a továbbiakban $\left[{n \atop k}\right]$ azt, hányféleképpen lehet n elemből k–t kiválasztani, ha a sorrend nem számít, de az elemek *többször is* szerepelhetnek. Elnevezése **ismétléses kombináció**.

137. Mutassuk meg, hogy $\left[{n \atop k}\right] = \binom{n+k-1}{k}$.

138. Ötfajta képeslapot árulnak. Hányféleképp vehetünk 12 -t?

139. Legfeljebb hány tagja van egy k változós homogén d–edfokú polinomnak?

* 140. k ember között akarunk bizonyos összeget szétosztani. Keress kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a következő két változat között:
   a) n forintot osztunk ki tetszőlegesen (az is lehet, hogy egyesek semmit sem kapnak);
   b) $n + k$ forintot osztunk ki úgy, hogy senki ne távozzon üres kézzel.

141. (folytatás) Mennyi a lehetőségek száma az előző feladatban?

142. k féle képeslapod van, éspedig az i–edikből a_i darab $(i \leq k)$. Hányféleképpen küldhetjük el az összeset n barátunknak? (Lehet, hogy valaki nem kap; az is lehet, hogy valakinek egy fajtából többet is küldünk.)

* 143. Hányféleképp lehet a polcon lévő n könyvből k db–ot levenni, ha szomszédosakat nem szabad? →

1.7. A szita–módszer

144. Hány olyan pozitív egész szám van, mely osztója a 10^{40} és 20^{30} számok valamelyikének? →

145. 12 könyv közül 6 nem érdekes, 4 rosszul van fűzve, 3 rosszul fűzött könyv nem is érdekes. Hány jól fűzött érdekes könyvünk van?

146. Egy osztály 30 tanulója közül

a matematikát	12	a matematikát és a fizikát	5		
a fizikát	14	a matematikát és a kémiát	4		
a kémiát	13	a fizikát és a kémiát	7	mindhármat	3

szereti. Hány tanuló nem kedveli egyiket sem? →

147. (folytatás) Milyen algebrai műveletekkel számolható az előző feladat eredménye a számadatokból? →

Ismét egy típus–hiba.

Hányféleképpen tudunk eltenni 20 különböző tartalmú papírlapot egy piros, egy sárga, egy kék és egy zöld irattartóba úgy, hogy mind a négybe legalább egy jusson? (Egy dosszién belül a sorrend közömbös.)
„Megoldás":

Tegyünk a négy helyre egyet–egyet! Erre $n(n-1)(n-2)(n-3)$ lehetőség van.
A maradékot osszuk el tetszőlegesen! Ez 4^{n-4} féle módon történhet.
„Eredmény": $n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot 4^{n-4}$.

Természetesen itt is — mint az I.rész 1.1. („Dobjuk ki ...") pontjában — az a baj, hogy bizonyos eseteket többször számoltunk. Pl. ha a piros irattartóba eredetileg az 1–es papírt tettük, és később odakerült, mondjuk, a 8–as, ez ugyanaz, mintha eredetileg tettük volna oda a 8–ast és később az 1–est.

Jelölje a továbbiakban $|X|$ az X halmaz elemszámát!

A SZITA–FORMULA: Kijelölted az $\mathbf{A}$ halmaz n részhalmazát, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$–et. Azon elemek száma, amelyek egyik $\mathbf{A}_i$–ben sincsenek benne,

$$|\mathbf{A}| - \sum |\mathbf{A}_i| + \sum |\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j| - \sum |\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j \cap \mathbf{A}_k| + \dots + (-1)^n |\mathbf{A}_1 \cap \dots \cap \mathbf{A}_n|$$

148. Igazold a szita–formulát! •

149. (folytatás) Hány elem van benne *legalább egy* $\mathbf{A}_i$–ben? →

150. Oldd meg helyesen a szita–formula előtti irattartós feladatot! •

151. Egy kerek asztal körül ülő n ember közül hányféleképpen választható ki három, páronként nem szomszédos? •

152. Egy zsákban 10 pár cipő van. Hányféleképpen vehetünk ki belőle 6 darabot, hogy *ne* legyen köztük egy pár sem? •

153. A ruhatárban 10 ember hányféleképp kaphatja vissza a kabátját, ha semelyiknek sem jut a sajátja?

154. Levelet írsz n barátodnak, de — mielőtt a már megcímzett borítékokba tennéd őket — elalszik a villany. Véletlenszerűen elhelyezve őket mi a valószínűsége, hogy egyik barátod sem a neki írt levelet kapja?

155. Hány, ezernél kisebb természetes szám van, mely nem osztható a 2, 3, 5, 7 számok egyikével sem?

156. Hány $2n$ betűs szó képezhető az $a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n, a_n$ betűkből, ha azonos betűk nem lehetnek szomszédosak?

157. Hány *ráképezése* van egy n elemű halmaznak egy m elemű halmazra? (ráképezés: az m elemű halmaz minden eleme legyen képe az n elemből legalább egynek.)

158. Mutasd meg, hogy

$$n! = n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \ldots + (-1)^i \binom{n}{i}(n-i)^n + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}$$

* 159. Egy n elemű halmazt hányféleképpen lehet m darab (nem feltétlenül diszjunkt) k elemű részének egyesítéseként előállítani,
   a) ha a részhalmazok sorrendje számít és lehetnek azonosak is.
   b) ha csupa különböző részhalmaz kell és a sorrend nem számít.

* 160. Adottak egy X alaphalmaz $A_1, A_2, \ldots A_n$ részhalmazai. Hány elem tartozik az A_i –k közül
   a) pontosan egybe?
   b) pontosan kettőbe?
   c) pontosan k–ba?
   d) legalább k–ba? →

161. Az $n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\ldots{p_r}^{k_r}$ számhoz hány nála kisebb, hozzá relatív prím van? (a p_i–k különböző primek, $k_i \geq 1$.)

* 162. Mutasd meg, hogy egy n pontú G gráf k színnel való jó színezéseinek száma k–nak polinomja!

* 163. Hányféleképpen vághatunk egy r elemű halmazt k darab *nem–üres* részre? (A részek nincsenek számozva; csak a tartalmuk különbözteti meg őket.) →

1.8. Két példa rekurziókra

A Fibonacci–számok

DEF. Az $F_1 = F_2 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ rekurzióval definiált számsorozat elemei a **Fibonacci–számok** (néha célszerű az $F_0 = 0$–t is bevenni):

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

164. Hányféleképp lehet felmenni n lépcsőfokon, ha egyszerre egy vagy két fokot léphetünk? •
165. Hány olyan n–hosszú sorozat képezhető az a és a b betűkből, melyben nincsen két szomszédos b? →
166. Mutasd meg, hogy a szomszédos Fibonacci–számok relatív prímek! →
* 167. Bizonyítsd be, hogy minden m -re van m–mel osztható Fibonacci–szám! →
168. Bizonyítsd be, hogy ha $k \mid n$, akkor $F_k \mid F_n$!
* 169. Bizonyítsd be, hogy minden természetes szám egyértelműen felírható különböző, nem szomszédos Fibonacci–számok összegeként!
170. Keress olyan (a_i) mértani sorozatot, amely kielégíti az $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ rekurziót! (Az azonosan 0 sorozaton kívül is van ilyen!) →
171. (folytatás) Mutasd meg, hogy az ilyen sorozatok tetszőleges lineáris kombinációi is jók lesznek!
172. Írd fel a Fibonacci–sorozatot két mértani sorozat lineáris kombinációjaként! •
173. A polcon lévő n könyvből nem vehetünk le szomszédosakat. Hányféleképpen választhatunk
    a) néhányat (tetszőleges számút)?
    * b) pontosan k darabot? •

Bizonyítsd be a következő egyenlőségeket:

174. $F_{n+2} = \sum_k \binom{n-k+1}{k}$
175. $F_{n+1}F_{n-1} - F_{2n} = (-1)^n$.
176. $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.
177. $F_{mk+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}$.
178. $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. →
* 179. Milyen számok alkotják az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

mátrixot?

Keressünk képleteket!

Hatványok összegei

Bizonyára mindenki ismeri az első n természetes szám összegét:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Valószínűleg közismert az is, hogy magasabb hatványokra is van hasonló képlet, ha nem is tudja őket mindenki fejből:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Érdekes, hogy az utóbbi éppen a legelső négyzete. Az is feltűnhet, hogy a három képlet n nagy értékeire körülbelül

$$\frac{n^2}{2}, \ \frac{n^3}{3} \ \text{ill.} \ \frac{n^4}{4}.$$

DEF. Jelöljük $f^r(n)$–nel az első n darab r–edik hatvány összegét:

$$f^r(n) = 1^r + 2^r + \ldots + n^r.$$

Ennek tulajdonságát (nagyságrendjét, alsó–felső becslését és a pontos érték zárt alakját) vizsgáljuk a továbbiakban.

* 180. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{f^r(n)}{n^{r+1}} \to \frac{1}{r+1}, \text{ha } n \to \infty.$$

→

* 181. (folytatás) Mutasd meg, hogy

$$\frac{n^{r+1}}{r+1} \le f^r(n) \le \frac{(n+1)^{r+1}}{r+1}.$$

→

Különbség–sorozatok. Egy egyszerű trükk.

DEF. Legyen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ tetszőleges sorozat. Az $a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_n, \ldots$ sorozatot az a_n **különbség–sorozatának** nevezzük. Jelölése

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Hasonlóan definiálható a $\Delta^2 a_n = \Delta\Delta a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ sorozat is, és általában

$$\Delta^k a_n = \Delta\Delta^{k-1} a_n.$$

Ezzel a jelöléssel $\Delta^0 a_n = a_n$ és $\Delta^1 a_n = \Delta a_n$.

182. Töltsd ki (a Δ–kat az a_i–kkel kifejezve) az alábbi táblázatot:

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
\Delta^0 a_n: & a_0 & & a_1 & & a_2 & & . & & . & & a_{n-2} & & a_{n-1} & & a_n \\
\Delta^1 a_n: & & \Delta a_0 & & \Delta a_1 & & \Delta a_2 & & . & & . & & \Delta a_{n-2} & & \Delta a_{n-1} & \\
\Delta^2 a_n: & & & \Delta^2 a_0 & & \Delta^2 a_1 & & \Delta^2 a_2 & & . & & . & & \Delta^2 a_{n-2} & & \\
\Delta^3 a_n: & & & & \Delta^3 a_0 & & \Delta^3 a_1 & & \Delta^3 a_2 & & . & & . & & & \\
. & & & & & & & & & & & & & & & \\
. & & & & & & & & & & & & & & & \\
. & & & & & & & & & & & & & & & \\
\Delta^n a_n: & & & & & & & \Delta^n a_n & & & & & & & &
\end{array}$$

(Ne felejtsd el az alsó $\Delta^n a_n$–et is kifejezni az a_i–kkel!) →

183. (folytatás) És ha a fenti háromszögben az elemek nem a felettük lévők különbségei, hanem összegei lennének, mi kerülne az alsó sor közepére? →

184. Fejezd ki a_n–et a sorok bal szélén található $\Delta^k a_0$–okkal! →

185. (folytatás) Mutasd meg, hogy $a_n = \sum \frac{\Delta^i a_0}{i!} n(n-1)\ldots(n-i+1)$.
Megjegyzés: Ez a Taylor–formulára hasonlít, csak n hatványai helyett „leszálló" szorzatok szerepelnek benne.

186. Bizonyítsd be, hogy ha $a_n = p_r(n)$ r–edfokú polinom, akkor Δa_n $(r-1)$–edfokú polinom lesz.

187. (folytatás) Igazold azt is, hogy r–edfokú polinom $(r+1)$–edik különbségsorozata azonosan 0. →
Megjegyzés: A fenti 184. feladat szerint

$$a_n = \sum \binom{n}{i} \Delta^i a_0.$$

A 187. feladatból pedig, ha valahonnan tudjuk egy sorozatról, hogy polinom, akkor bizonyosak lehetünk abban, hogy elég sokadik diferenciái eltűnnek, tehát a_n fenti felírásában a tagok száma n-től független. Ezek az észrevételek sok konkrét sorozat n–edik tagjának explicit felírását könnyítik meg.

188. n általános helyzetű egyenes hány részre vágja a síkot? →

189. n általános helyzetű sík hány részre vágja a teret? →

* 190. (folytatás) Mit mondhatunk d dimenzióban? →

191. Keress képletet $f^4(n)$–re, a negyedik hatványok összegére! •

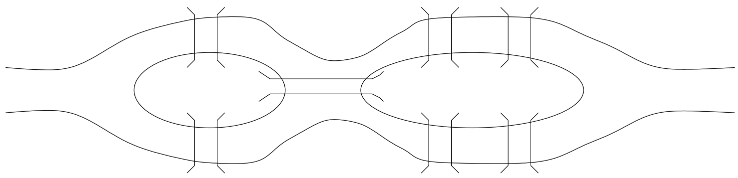
192. a) Ábrázolható-e bármely négy halmaz *körökkel* (Venn–diagrammal)?
b) n kör legfeljebb hány részre osztja a síkot? •

2. fejezet

Gráfok I.

2.1. Elemi gráfelmélet

1. A hagyomány szerint Königsberg (ma Kalinyingrád) polgárai egy napon nehéz kérdéssel keresték fel a városukban lakó Leonhard Eulert: mondaná már meg nekik, miért nem sikerül soha úgy végigsétálniuk a Pregel folyó hét hídján, hogy mindegyiken csak egyszer keljenek át. (L. térkép.) Te tudnál válaszolni nekik?



2.1. ábra. A königsbergi hidak.

Megjegyzés: Valószínűleg ez az első gráfelméleti jellegű probléma, aminek írásos nyoma maradt.

A továbbiakban általában irányítatlan élekből álló gráfokkal foglalkozunk, melyeknek véges sok pontjuk van. Ha nem mondjuk külön, akkor többszörös- és hurokéleket nem engedünk meg; csak **egyszerű** gráfokat vizsgálunk.

Fokszámok

DEF. Pont **foka** (vagy **fokszáma**): a belőle induló élek száma.

2. Van–e olyan (legalább két pontú) gráf, amiben minden pont foka különböző? →
3. Van–e olyan 9 pontú gráf, melyben a pontok foka rendre
   a) 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5
   b) 6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1 →

4. (folytatás) Hát olyan 8 pontú gráf van–e, melyben a fokszámok 6, 6, 6, 6, 3, 3, 2, 2 ? →
5. Mutasd meg, hogy bármely gráfban a fokszámok össszege az élszám kétszerese!
6. Tetszőleges gráfban a páratlan fokú pontok száma páros. →

DEF. Egy csupa különböző élekből álló élsorozat **séta**, ha él nem ismétlődik benne, és minden él egyik végpontja az előző, másik végpontja a rákövetkező éllel közös. **Körséta**, ha a kezdő– és a végpont azonos.

DEF. **Út**, illetve **kör**: olyan séta (ill. körséta), melyben sem él, sem pont nem ismétlődik (kivéve körben a kezdő– ill. végpontot).

7. Mutasd meg, hogy ha egy gráf minden pontja legalább másodfokú, akkor a gráfban van kör! →

* 8. (folytatás) Igazold, hogy ha minden pont foka legalább k, akkor van $k+1$ vagy több pontú kör!

Összefüggőség

DEF. Egy gráf **összefüggő**, ha bármely két pontja között vezet út. (Egyetlen pontból álló gráfot összefüggőnek tekintünk.)

9. Igaz–e, hogy ha egy gráf bármely két pontja között van séta, akkor a gráf összefüggő (azaz pontjai között van út is)? →
10. Mutasd meg, hogy ha a–ból vezet út b–be, b–ből pedig c–be, akkor a–ból is vezet c–be! →

DEF. A maximális (azaz nem növelhető) összefüggő részgráfokat a gráf **komponenseinek** nevezzük. (Összefüggő gráf maga egy komponens.)

11. Igaz–e, hogy minden pont benne van egy komponensben? •
12. Lehet–e két különböző komponensnek közös pontja? →

Megjegyzés: A gráfok tehát egy vagy több, közös pont nélküli komponensre bomlanak. Úgy is mondhattuk volna, hogy ezek a „van $a - b$ út” reláció szerinti ekvivalencia–osztályok. A 10. feladat éppen azt mondja, hogy e reláció tranzitív.

13. Mutasd meg, hogy ha egy $2n$ pontú gráf minden pontjának foka legalább n, akkor a gráf összefüggő! →
14. (folytatás) Igaz marad–e az előző állítás, ha $n-1$ fokú pontokat is megengedünk? →

DEF. A G gráf **komplementere** az a $\overline{G}$, melyben pontosan azokat az éleket húzzuk be, amelyek az eredeti G–ben nem szerepelnek.

15. Igaz–e, hogy vagy G, vagy a komplementere biztosan összefüggő? →
16. Mutasd meg, hogy összefüggő gráfból elhagyva egy kör egyik élét a gráf továbbra is összefüggő marad. •

17. Igaz–e, hogy minden összefüggő gráf tartalmaz *körmentes* összefügő részgráfot? •
18. Bizonyítsd be, hogy bármely n pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van!

Euler–vonalak és –körséták

DEF. **Euler–körsétának** (ill. **Euler–sétának** vagy **Euler–vonalnak**) nevezünk egy körsétát (ill. sétát), ha minden élet pontosan egyszer használ.

19. Mutasd meg, hogy ha egy összefüggő gráf egy körének éleit törölve a maradék gráfnak van Euler–körsétája, akkor az eredetinek is van!
20. (folytatás) Igaz-e ugyanez Euler–vonalra?
21. Bizonyítsd be, hogy egy összefüggő gráfban
    a) akkor és csak akkor létezik Euler–körséta, ha minden pont foka páros;
    b) akkor és csak akkor létezik Euler–séta, ha legfeljebb két páratlan fokú pont van.
    c) mit mondhatunk azokról a gráfokról, amelyekben pontosan egy páratlan fokú pont van?
    d) Ha pontosan $2k$ páratlan fokú pont van, akkor az élek halmaza k darab élidegen sétára bontható. →
22. Egy városban, ahol az úthálózat összefüggő, egyirányú utcák is vannak. Mikor járhatja be egy locsolóautó az összes utcát (éspedig az egyirányúakat pontosan egyszer, jó irányban; a kétirányúakat pedig a két sávban egyszer oda, egyszer vissza) úgy, hogy végül a kiindulóponton fejezze be a munkáját!
23. (folytatás) Mutasd meg, hogy ha minden utca kétirányú, akkor az előző bejárás mindig megoldható!

** 24. Irányított és irányítatlan éleket is tartalmazó gráf élei mikor járhatók be úgy, hogy mindegyiken (az irányítatlanokon is!) pontosan egyszer menjünk végig?

Hamilton–utak és –körök

25. Bejárható-e az 5×5–ös sakktábla egy lóval,
    a) ha nem kell ugyanott befejezned, ahonnan indultál;
    b) ha a kiinduló mezőre kell visszatérned? →
26. (folytatás) Ugyanezek a kérdések 4×4–es sakktáblára. →
27. Mutasd meg, hogy páratlan számú mezőből álló sakktáblát nem lehet lóval a fenti b) típusban végigjárni!
28. (folytatás) De a 8×8–ast lehet!

DEF. **Hamilton–körnek** (ill. **Hamilton–útnak** vagy **Hamilton–vonalnak**) nevezünk egy kört (ill. utat), ha minden ponton egyszer megy át.

29. Igazold a következőket:
    a) ha a G gráfban létezik k darab pont, amelyeket törölve G több, mint k komponensre esik szét, akkor G–nek nincs Hamilton–köre;
    b) ha a gráfban létezik k darab pont, amelyeket elhagyva G még $k+1$–nél is több komponensre esik szét, akkor Hamilton–útja sincs!

   Megjegyzés: Sajnos, ez a feltétel nem elégséges! Nem is ismert általános kritérium Hamilton–kör létezésére. Elégségesek, de nem szükségesek az alábbiak:

* 30. Mutasd meg, hogy ha egy n pontú gráfnak legalább

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$$

   éle van, akkor a gráfban van Hamilton–kör! →

* 31. (Dirac tétele): Ha egy n pontú gráf minden pontja legalább $n/2$ fokú, akkor a gráfban van Hamilton–kör.

32. Petersen gráf: egy öt pontú körben egy csillagötszög; a megfelelő belső–külső csúcsok összekötve. Más definíció: a csúcsok egy ötelemű halmaz kételemű részhalmazai. Kettőt összekötünk, ha a kételemű részek diszjunktak.
    a) Mutasd meg, hogy a két definíció ugyanazt a gráfot adja.
    b) Igaz-e, hogy a Petersen gráf „éltranzitív”, azaz bármely él átvihető bármely másikba a csúcsok alkalmas permutációjával?
    c) A Petersen gráfnak nincs Hamilton köre, de bármely csúcsát elhagyva a maradéknak már lesz.

33. A $\overrightarrow{G}_k$ irányított gráf csúcsai azon k hosszú $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ sorozatok, melyekre $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Élet húzunk $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$–ból $(a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$ –be.
    (a) Biz.be: $\overrightarrow{G}_k$–nak van irányított Euler-körsétája.
    (b) Van-e irányított Hamilton–köre?

2.2. Fák

DEF. Az összefüggő, körmentes gráfokat **fának** nevezzük. (Egy pontból vagy egyetlen élből álló gráf is fa. Egy, ill. két pontú fa nincs is más.)

DEF. Ha körmentes, de nem feltétlenül összefüggő, akkor **erdő**. (Komponensei fák, azért.)

34. Rajzold fel az összes 3, 4 ill. 5 pontú fát! (Az izomorfakat — amelyek a pontok cseréjével egymásba mennek — csak egyszer.)
35. Igaz–e, hogy minden legalább két csúcsú fában van pontosan elsőfokú pont? →
36. Mutasd meg, hogy minden n pontú fa élszáma $n-1$. →
37. (folytatás) Hány éle van egy n pontú, k komponensű erdőnek? →

38. Igaz–e, hogy n pontú, legalább n élű gráfban van kör?
39. Bizonyítsd be, hogy egy gráf akkor és csak akkor fa, ha bármely két pontja között *pontosan egy* út vezet.
40. Igazold, hogy tetszőleges n pontú *összefüggő* gráfra az alábbiak ekvivalensek (azaz, ha bármelyik teljesül, akkor az összes többi is)!
    i) körmentes
    ii) $n-1$ éle van
    iii) bármely pontpár között legfeljebb egy út vezet.
41. Igaz–e, hogy fában mindig van legalább két elsőfokú pont? →
42. Húzzál be egy fába még egy élt! Bizonyítsd be, hogy így mindig *pontosan egy* kör keletkezik!
43. Igazold, hogy fákban az *összes* leghosszabb út egy ponton megy át!

* 44. Ez az állítás nem minden gráfra igaz (bár sokáig úgy sejtették). →

45. Jelöljük egy fa legalább harmadfokú csúcsainak számát x–szel, az elsőfokúakét pedig y–nal!
    a) Mutasd meg, hogy ha a fának legalább két pontja van, akkor $y \geq x+2$!
    b) Mikor állhat egyenlőség a)–ban? →

* 46. Mutass példát olyan fára, amelynek egyetlen automorfizmusa a helyben hagyás!

* 47. Bármely fa bármely automorfizmusának van vagy fix pontja, vagy fix éle (azaz vagy helyben hagy egy pontot, vagy egy él két végpontját felcseréli).

* 48. $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (ahol $d_i \geq 1$) pontosan akkor lesz egy fa fokszám–sorozata, ha $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2(n-1)$.

* 49. Egy fa $T_1, T_2, \ldots, T_k$ részfái közül bármely kettőnek van közös csúcsa. Bizonyítandó: az összesnek is van.
Igaz-e hasonló állítás csúcsok helyett élekre?

50. A síkon véges sok pont úgy helyezkedik el, hogy minden pár távolsága különböző. Minden pontból a hozzá legközelebb állóhoz egyenes szakaszt húzunk. Keletkezhet-e így zárt sokszögvonal? →

Feszítő fák

DEF. Egy összefüggő gráf egy részfáját (azaz olyan részgráfját, ami fa) **feszítő fának** nevezzük, ha tartalmazza az eredeti gráf minden pontját. Ha egy nem összefüggő gráf minden komponensének vesszük egy–egy feszítő fáját, **feszítő erdőt** kapunk.

51. Mutasd meg, hogy minden összefüggő gráfnak van feszítő fája! →
52. (folytatás) Minden gráfnak van feszítő erdeje.
53. Bizonyítsd be, hogy összefüggő gráfból mindig elhagyható egy pont (a belőle induló élekkel együtt) úgy, hogy összefüggő gráf maradjon! →

54. Mely összefüggő gráfokból radírozhatunk ki egy *élet* (de pontokat nem!), hogy az összefüggőség ne szűnjön meg? →
55. Igazold, hogy bármely, legalább öt pontú gráfban vagy a komplementerében van kör! →
56. Húzzál be egy fába még egy élt! Bizonyítsd be, hogy így mindig pontosan egy kör keletkezik! →
57. Mutasd meg, hogy n pontú, e élű, k komponensből álló gráfban legalább $e-n+k$ különböző kör van! →
58. Bizonyítsd be, hogy bármely n pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van! →
59. Mutasd meg, hogy bármely $n \geq 2$ pontú gráfra az alábbiak ekvivalensek:
    i) nem tartalmaz kört és $n-1$ éle van.
    ii) összefüggő és körmentes.
    iii) összefüggő és $n-1$ éle van.
    iv) nem tartalmaz kört és bármely két (öszekötetlen) pontját összekötve pontosan egy kör keletkezik.
    v) összefüggő, de bármely élét törölve már nem marad az.
    vi) bármely két pontját pontosan egy út köti össze.

2.3. Kétszeres összefüggőség

DEF. A $G(V, E)$ gráfnak **szétvágó pontja** $v \in V$, ha V–ből kihagyva v–t (és E–ből a v–re illeszkedő éleket) az összefüggő komponensek száma nő.

DEF. Az összefüggő G gráf **kétszeresen összefüggő**, ha $|V| \geq 3$ és nincs szétvágó pontja.
(A pontszámra vonatkozó feltétel a két pontú, egyetlen élű gráfot zárja ki.)

60. Bizonyítsd be, hogy kétszeresen összefüggő gráf bármely élét elhagyva a maradék összefüggő lesz. →
61. Ha G kétszeresen összefüggő, akkor bármely két pontja között vezet két, közös belső pont nélküli út. (Úgy is mondhatjuk, hogy bármely két pont egy körön van.) •
62. Igaz-e, hogy kétszeresen összefüggő gráfhoz újabb pontot véve és azt két (különböző) régivel összekötve újra kétszeresen összefüggő gráfot kapunk? →
63. Legyen V_1 a kétszeresen összefüggő $G(V, E)$ gráf pontjainak tetszőleges, legalább két elemű részhalmaza, $v \in V \setminus V_1$ pedig tetszőleges pont. Mutasd meg, hogy vezet v–ből V_1 két különböző pontjába egy–egy közös belső pont nélküli út. (Csak v, a kezdőpont azonos.) →
64. A következő két feltétel közül melyik egyenértékű a kétszeres összefüggőséggel?
    a) Bármely x, y, z ponthármashoz van olyan x–y út, ami elkerüli z–t;
    b) Bármely x, y, z ponthármashoz van olyan x–y út, ami átmegy z–n. →

65. Igaz-e, hogy bármely összefüggő gráf bármely $x, y, z \in V$ ponthármasához van (tőlük nem feltétlenül különböző) $p \in V$, melyből vezet egy–egy közös belső pont nélküli út x, y és z mindegyikébe?
(Valamelyik út lehet él nélküli, egyetlen pontból álló is.) →

66. Mutasd meg, hogy kétszeresen összefüggő gráfban bármely x, y pontpárhoz és **e** élhez van olyan x–y út, ami tartalmazza **e**–t!

67. (folytatás) Igaz-e, hogy kétszeresen összefüggő gráf bármely két éle egy körön van?

DEF. Összefüggő gráfban **blokknak** nevezzük
— a maximális (nem bővíthető) kétszeresen összefüggő részeket;
— a szétvágó éleket.

68. Mutasd meg, hogy két különböző blokknak legfeljebb egy közös pontja lehet! →

2.4. Irányított gráfok

Körmérkőzések

69. Mutasd meg, hogy egy ping–pong körmérkőzés résztvevői sorbaállíthatók úgy, hogy mindenki legyőzte a *közvetlenül* mögötte állót! (Azt nem követeljük meg, hogy az *összes* mögötte állót le kellett volna győznie.) •

* 70. (folytatás) Bizonyítsd be, hogy az ilyen sorrendek száma mindig páratlan!

71. Mutass példát arra, hogy ha *pontosan egy* mérkőzés még hátra van, akkor nem feltétlenül létezik ilyen sorbaállítás!

72. Mutasd meg, hogy egy (legalább három tagú) ping–pong körmérkőzés versenyzői — ha nincs olyan csoportjuk, akik mindnyájan legyőzték a másik csoport minden tagját — körbeállíthatók úgy, hogy mindenki legyőzte a tőle jobbra állót! →

73. Adj eljárást (esetleg írj programot) ami tetszőleges teljes irányított gráfban megkeresi az alkalmas körbeállítást, ha van; ha nincs, akkor mutat egy „rossz” szétvágást.

DEF. **Pszeudogyőztesnek** nevezünk egy X versenyzőt, ha mindenki, aki legyőzte őt, kikapott legalább egy olyan Y–tól, akit X legyőzőtt. (Úgy is mondhatnánk, hogy X minden vereségéért közvetve, valamely Y–on keresztül elégtételt vett.)

74. Mutasd meg, hogy minden körmérkőzésnek van pszeudogyőztese! →

75. (folytatás) Ha nincs olyan versenyző, aki mindenkit legyőzött, akkor legalább két pszeudogyőztes van! →

* 76. (folytatás) Most kezd érdekes lenni az ügy: az előző feltétel mellett van három pszeudogyőztes is!

77. (folytatás) Már csak egy kérdés maradt: tudsz-e olyan végeredményt produkálni, ahol nincs négy?

78. Mutass minden $n \neq 2,4$–re olyan végeredményt, amikor *minden* versenyző pszeudogyőztes! $\to$

Megjegyzés: A lehetséges körmérkőzés–eredmények *majdnem mind* ilyenek! (Lásd a következő feladatot.)

DEF. **Véletlen körmérkőzés:** minden játszmáról 1/2 valószínűséggel, egymástól függetlenül döntjük el, ki nyert.

79. Jelölje p_n annak valószínűségét, hogy egy n résztvevős véletlen körmérkőzésen nem mindenki pszeudogyőztes. Bizonyítsd be, hogy $p_n \to 0$! $\to$

Irányított gráfok

DEF. A G irányított gráfban az x pont **be–foka** (jele: $d_G^+(x)$, vagy röviden $d^+(x)$), illetve **ki–foka** (jele: $d_G^-(x)$, vagy röviden $d^-(x)$) az x–be bemenő ill. onnan kifelé irányított élek száma.

80. Mutasd meg, hogy $\sum\limits_{x \in G} d_G^+(x) = \sum\limits_{x \in G} d_G^-(x)$.

81. Mely gráfok irányíthatók úgy, hogy minden pontba ugyanannyi él menjen be, mint ahány kijön? (Ez a közös érték különböző pontokra különböző lehet!) $\bullet$

82. (*Euler–körséta*) Mely irányított gráfok járhatók be úgy, hogy minden élen (jó irányban) pontosan egyszer végigmenve a kiindulópontba jussunk vissza? $\bullet$

* 83. Minden irányított gráfban van olyan V_1 független ponthalmaz, hogy $V \setminus V_1$ minden pontja V_1 valamelyik pontjából legfeljebb két lépésben elérhető. (független ponthalmaz: nincs köztük él.)

Erős összefüggőség.

DEF. Egy irányított gráf **erősen öszefüggő**, ha bármely pontjából bármely másikba vezet irányított út. (Ez minden pontpárra két feltétel: egy oda, egy vissza.) **Összefüggő**, ha az élek irányítását elfelejtve irányítatlan gráfként összefüggő lesz; ennek semmi köze az irányított utakhoz.

84. Keress módszert irányított gráf erős összefüggőségének vizsgálatára! $\bullet$

85. Egy erősen összefüggő gráf pontjait két diszjunkt, nem-üres osztályba osztottuk. Mit mondhatunk a két rész közötti élekről? $\to$

86. Tudsz-e ilyen típusú szükséges és elégséges feltételt az erős összefüggőségre? $\to$

87. Mutasd meg, hogy ha egy *irányítatlan* gráf bármely élét törölve a gráf még mindig összefüggő marad, akkor irányítható úgy, hogy erősen összefüggő legyen.

2.5. Vegyes feladatok

88. Melyek azok a gráfok, amelyekben bármely két élnek van közös pontja? →
89. Hány különböző gráf adható meg az $1, 2, \ldots, n$ pontokon? →
90. Nevezzük egy összefüggő gráf két pontja közötti távolságának az őket összekötő legrövidebb út hosszát. Mutasd meg, hogy ez eleget tesz a háromszög-egyenlőtlenségnek!
91. (folytatás) Igazold ugyanezt arra az esetre is, ha távolságnak a *leghosszabb* út hosszát nevezzük!
92. Ha egy összefüggő gráf minden pontja másodfokú, akkor a gráf egyetlen körből áll.
93. Milyen komponensekből állhat egy gráf, ha minden pontjának foka legfeljebb kettő? →
94. Mutasd meg, hogy összefüggő gráf bármely két leghosszabb útjának van közös pontja! →

* 95. Tegyük fel, hogy egy gráf minden pontjának foka legalább három.
   a) Mutasd meg, hogy a gráfban van páros számú pontból álló kör.
   b) Nincs olyan $m > 2$ egész, amivel minden kör hossza osztható lenne.
   c) Mutass olyan példát, amiben van páratlan pontú kör!
   d) Igaz–e, hogy mindig lesz a gráfban páratlan kör is? →

DEF. Az A halmaz **P partíciója** olyan $H_1, H_2, \ldots$ halmazrendszer, melyre $\bigcup H_i = A$ és $H_i \cap H_j = \emptyset$, ha $i \neq j$.

* 96. Nevezzük az A alaphalmaz $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \ldots$ partíciórendszerét szeparálónak, ha bármely $x, y \in A$–ra van i, hogy x és y a $\mathbf{P}^i$ partíció különböző osztályaiba esik. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges n elemű A halmaz bármely $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \ldots, \mathbf{P}^n$ szeparáló partíciórendszeréből kihagyható egy $\mathbf{P}_i$ úgy, hogy a maradék még mindig szeparáló legyen.

DEF. Legyen adva a $G(V, E)$ gráf, $|V| = n$ és két pont: $s, t \in V$ úgy, hogy $(s, t) \in E$. A gráf s–t **számozása** $g : V \to \{1, 2, \ldots, n\}$, ha

$$g(s) = 1;$$
$$g(t) = n;$$
$$\forall y \neq s, t \ \exists x, z \in V \text{ hogy } (x, y) \in E,\ (y, z) \in E \text{ és } g(x) < g(y) < g(z).$$

** 97. Minden kétszeresen összefüggő gráfnak van s–t számozása.

2.6. Fokszámsorozatok realizációja

98. Legyen $0 \leq d_1, d_2, \ldots, d_n$ természetes számokból álló sorozat, melyre $\sum d_i$ páros. Konstruálj olyan — esetleg többszörös- és hurokéleket is tartalmazó — n pontú gráfot, melyben az i–edik pont foka éppen d_i (a hurokélek kétszeresen, azaz mindkét végükkel számolandók). →

99. Legyenek $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ és $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_m$ természetes számok, melyekre $\sum a_i = \sum b_j$. Igazold, hogy létezik (esetleg többszörös élt is tartalmazó) $m+n$ pontú páros gráf, melyben a felső pontok fokszámai éppen az a_i–k, az alsóké pedig a b_j–k.

100. Legyen $0 \leq d_1, d_2, \ldots, d_n$ természetes számokból álló sorozat, melyre $\sum d_i$ páros és minden $i \leq n$–re $d_i \leq \sum_{j \neq i} d_j$. Konstruálj olyan — esetleg többszörös-élet is tartalmazó — *hurokél nélküli* n pontú gráfot, melyben az i–edik pont foka éppen n_i.

* 101. Mely $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ fokszám–sorozatok valósíthatók meg *egyszerű* gráffal? →

* 102. Mely $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_m$ fokszámsorozat–*párok* valósíthatók meg egyszerű *páros* gráffal?

* 103. Legyen $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n \leq n$ olyan sorozat, melyre $\sum d_i = 2(n-1)$. Mutasd meg, hogy létezik n pontú fa ilyen fokszámokkal! →

2.7. Páros gráfok. A Kőnig–Hall tételkör.

DEF. A G gráf **kétosztályú**, ha pontjai két részre oszthatók úgy, hogy egyik részen belül se menjen egyetlen él sem. (Minden él a két rész egy–egy pontját kösse össze.)

104. Adj módszert (esetleg írj programot) annak eldöntesére, hogy egy gráf kétosztályú–e! Bizonyítsd is be, hogy módszered helyesen működik mind pozitív válasz (ha az eredmény egy jó kettéosztás) mind negatív válasz esetén (ha az eredmény az, hogy nincs ilyen)!

DEF. G **páros gráf**, ha minden köre páros (azaz nincs benne páratlan kör). Speciálisan a körmentes gráfok (fák és erdők) szükségképpen párosak.

105. Bizonyítsd be, hogy egy gráf akkor és csak akkor kétosztályú, ha páros.
(Mivel tehát a két fogalom azonos, elég egy elnevezés; a rövidebb "páros gráf"–ot szokás használni.) →

* 106. Mutasd meg, hogy bármely e élű gráf tartalmaz legalább $e/2$ élű páros gráfot! $\rightarrow$

107. Legyenek $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ és $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_m$ természetes számok, melyekre $\sum a_i = \sum b_j$. Igazold, hogy létezik (esetleg többszörös élt is tartalmazó) $m+n$ pontú páros gráf, melyben a felső pontok fokszámai éppen az a_i–k, az alsóké pedig a b_j–k.

Sokmindent lehet páros gráfokkal ábrázolni: gyártók és megrendelők közti szállításokat; egy halmaz elemei és bizonyos részhalmazai között az "x eleme a H részhalmaznak" relációt; fiúk és lányok között a "ki–kinek–tetszik" (ebből irányított gráf lesz) vagy a "kölcsönösen tetszenek egymásnak" relációt (utóbbiból irányítatlan páros gráf lesz).

Párosítások (független élrendszerek).

108. Egy vállalatnál hét pályázó jelentkezett hat üres munkahelyre (számozzuk ezeket 1–től 6–ig); egy ember több helyre is:

Aladár	az	1	–es	munkahelyre
Béla	az	1,6	–os	munkahelyre
Csaba	a	2,3,4	–es	munkahelyre
Dani	a	2,5	–ös	munkahelyre
Erzsi	a	3,4,5	–ös	munkahelyre
Feri	a	1,6	–os	munkahelyre
Géza	a	6	–os	munkahelyre

(a) ábrázold a helyzetet páros gráffal
(b) döntsd el, hogy betölthető–e mind a hat munkahely (egy ember csak egy helyre kerülhet). Ha nem mind, akkor hány tölthető be? Indokold a választ!
(c) javít–e valamit, ha Feri meggondolja magát és a 2–es munkahelyet is hajlandó elfogadni?

DEF. a G gráf éleinek egy F részhalmazát **független élek**nek vagy **részleges párosítás**nak nevezzük, ha közülük semelyik kettőnek nincs közös végpontja.

109. (folytatás) Egy munkaközvetítőnél hat ember jelentkezett. Nyolc állás jöhet szóba:

Ákos	1,2,3,4,6. munkahely
Bandi	2,5,8. munkahely
Csilla	2,5. munkahely
Dóra	2,8. munkahely
Ernő	5,8. munkahely
Feri	1,2,3,4,7. munkahely

Adj meg egy lehető legnagyobb független élrendszert! Indokold meg, miért nincs nagyobb!

110. Mutasd meg, hogy ha néhány (mondjuk k) jelentkező együttesen csak k–nál kevesebb helyre pályázik, akkor nem lehet mindenkit elhelyezni!
(Hasonlóan: ha néhány (mondjuk k) helyre együttesen csak k–nál kevesebb jelentkező pályázik, akkor nem lehet minden helyet betölteni.)

111. Egy harmadik cégnél hét helyre csak hatan pályáznak:

Anita	1,2 munkahelyre
Bea	2,3 munkahelyre
Cirill	3,4 munkahelyre
Diana	4,5 munkahelyre
Elemér	5,6 munkahelyre
Frici	6,7 munkahelyre

A főnök már belenyugodott, hogy így nem lehet az összes helyet betölteni. El is döntötte, hogy a hat emberből ki hova kerül: A–1, B–2, C–3, D–4, E–5, F–6. Ekkor érkezik a postás egy távirattal:
"`megpaalyaazom a 2--es munkahelyet stop geeza stop stop`".
A fenti hat független élből melyikeket cseréli ki a főnök és mely másikakra?

Hall feltétele és tételei.

DEF. Azt mondjuk, hogy a $G(V_1, V_2, E)$ páros gráf V_1 osztálya teljesíti a HALL–FELTÉTEL–t, ha tetszőleges k természetes számra V_1 bármely k db. pontja együtt legalább k db. V_2–belivel van összekötve.

DEF. Legyen F független (nem feltétlenül maximális) élrendszer a G gráfban. F–re nézve **alternáló** (="váltakozó") egy út (vagy kör), ha élei felváltva F–beliek ill. F–en kívüliek. (Pl. öt pont között négy egymás utáni él: f_1, e_1, f_2, e_2, ahol f_i F–beli, e_i nem F–beli; vagy akár két pont között egy F–en kívüli él önmagában is alternáló út)

112. Legyen F_1 független élrendszer G–ben. Mutasd meg, hogy
(a) ha van F_1–re nézve alternáló kör, akkor van másik, F_2 független élrendszer is G–ben, ami ugyanannyi élt tartalmaz, mint F_1.
(b) ha van F_1–re nézve alternáló út, ami F_1 által nem fedett ponttal kezdődik és végződik, akkor van F_1–nél több élből álló F_2 független élendszer is G–ben. →

113. Legyen F független élrendszer a G *páros* gráfban. G egyik ponthalmaza legyen V_1, a másik V_2 (nem feltétlenül ugyanannyi pontúak). Azon V_1–beli pontok halmazát, amelyekre nem illeszkedik F–beli él, jelöld C_1–gyel; a megfelelő V_2–belieket C_2–vel. Nevezhetjük ezeket **telítetlen** vagy **fedetlen** pontoknak.
(a) mutasd meg, hogy ha C_1–ből vezet alternáló út C_2–be, akkor van F–nél nagyobb független élrendszer a gráfban.
(b) Jelöld a C_1–en kívüli, de abból alternáló úton elérhető V_1–beli ill. V_2–beli pontok halmazát B_1–gyel ill. B_2–vel; A_1 ill. A_2 pedig legyen a két maradék

(vagyis amik nem érhetők el alternáló úton). F élei tehát részben A_1–ből A_2–be, részben B_1–ből B_2–be vezetnek.

(c) Tedd fel még azt is, hogy a nem–üres C_1–ből nem vezet alternáló út C_2–be. Mutasd meg, hogy ekkor V_1 nem teljesítheti a Hall–feltételt!
(Ötlet: mivel lehetnek összekötve a $(B_1 \cup C_1)$–beli pontok?) →

114. (folytatás) Adj módszert (esetleg írj programot) páros gráf maximális párosításának keresésére! Igazold, hogy módszered mind pozitív, mind negatív válasz esetén helyes eredményt ad!
Megjegyzés: páros gráf tárolása vagy él–listával, vagy $n \times m$–es kétdimenziós tömbbel (mátrix–szal) történhet: a V_1–beli i és V_2–beli j pontokra a tömb $G(i,j)$ eleme:
$$G(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{ha van } (i,j) \text{ él;} \\ 0, & \text{ha nincs.} \end{cases}$$

HALL TÉTELE: Páros gráfban a V_1 ponthalmazt fedő párosítás létezéséhez a Hall–feltétel szükséges és elégséges is.

115. A 113. feladat felhasználásával bizonyítsd be Hall tételét! →

Megjegyzés: a fenti gondolat; az eljárás ötlete és abból Hall tételének bizonyítása Kőnig Dénestől származik. Hall eredeti bizonyítása V_1 elemszáma szerinti teljes indukció volt:

116. Keress indukciós bizonyítást Hall tételére!
[ötlet: az indukciós lépés során válassz szét két esetet aszerint, hogy
(i) V_1 minden nem–üres valódi részéből több V_2–belibe megy él, mint ahány eleme e résznek van, illetve
(ii) van olyan nem–üres valódi rész, ami a Hall–feltételt pontos egyenlőséggel teljesíti.]

Gyakorló feladatok

117. A G páros gráf csúcsai $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ és $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Az első osztály pontjainak szomszédai:

a: $\{3,\ 5,6\}$
b: $\{2,\ 3,4,7\}$
c: $\{3,\ 5\}$
d: $\{1,\ 4,8\}$
e: $\{3,\ 6\}$
f: $\{1,\ 2,7,8\}$
g: $\{1,\ 3,5,8\}$
h: $\{5,\ 6\}$

Keresd meg G egy maximális párosítását, továbbá a 113. feladatban szereplő A_i, B_i, C_i $(i=1,2)$ halmazokat!

118. Egy iskolában a diákok különféle bizottságokat választottak (egy ember több bizottságnak is tagja lehet) és most minden bizottság a saját tagjai közül egy–egy elnököt szeretne kinevezni. Bármely bizottság bármely tagja alkalmas lenne elnöknek, de nem akarják, hogy valaki egyszerre több bizottságnak is elnöke legyen. Mikor valósítható ez meg? →

119. Zsuzsi huszonnégy mesekönyvét szeretné szétosztani tizenkét fiatalabb unokatestvére között. Úgy gondolta, mindegyiknek két–két olyat ajándékoz, ami még nincs meg nekik. Öt gyereknél már puhatolózott; összesen hét könyv jöhet náluk szóba, a többi 17 mindegyiküknek megvan. Szét tudja–e Zsuzsi osztani a könyveket úgy, ahogy tervezte?

* 120. Egy laktanyában kéttagú őrséget kell állítani a kapukhoz, a raktárakhoz, az őrtornyokba, stb.; összesen 29 helyre. Az őrparancsnok megkérdezi, ki hova menne szívesen. Mindenki megnevez néhány őrhelyet. Mikor teljesíthető minden őr igénye? →

121. Valaki kiválasztotta egy halmaz néhány részhalmazát és most szeretne mindegyikből kijelölni három–három elemet úgy, hogy minden elem csak egy részhalmaznál szerepeljen. Mikor tudja ezt megtenni?

* 122. Adott $s_1, s_2, \ldots, s_n$ természetes számok és $H_1, H_2, \ldots, H_n$ halmazok esetén mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy minden $i \leq n$–re a H_i–ből kiválaszthass s_i darab elemet úgy, hogy az összes ilyen elem különböző legyen?

Teljes párosítások

DEF. az F független élrendszer a G gráf **teljes párosítás**a, ha G minden pontjára illeszkedik F–nek legalább egy éle (és akkor szükségképpen pontosan egy). Persze ekkor a pontszám páros; ha pedig G páros gráf, akkor a két osztályban azonos számú pont van.

Hall tétele teljes párosításokra: Legyen G olyan páros gráf, amelyben az alsó és a felső ponthalmaz ugyanakkora. Ha G–ben létezik teljes párosítás, akkor V_1–re is és V_2–re is teljesül a Hall–feltétel; ha pedig valamelyikre teljesül, ez már elégséges a teljes párosítás létezéséhez.

123. Bizonyítsd be Hall fenti tételét! →

DEF. Egy gráf r–**reguláris**, ha minden pontjának foka r.

124. Mutasd meg, hogy r–reguláris páros gráf biztosan teljesíti a Hall-feltételt! •
Következmény: r–reguláris páros gráfnak mindig van teljes párosítása.

125. (folytatás) Igaz marad–e a fenti állítás, ha a gráfban többszörös éleket is megengedünk? →

126. Lerajzoltál egy páros gráfot, melyben minden csúcsba pontosan r él fut. Véletlenül éppen r darab különböző színű ceruzád van (a feketén kívül, amivel az eredeti ábra készült). Bizonyítsd be, hogy az éleket kihúzhatod színessel úgy, hogy minden csúcsba csupa különböző színű menjen!

127. (folytatás) Igaz marad–e a fenti állítás, ha a gráfban többszörös élek is szerepelnek?

128. (folytatás) Mutass példát olyan *nem-páros*, de reguláris gráfra, ahol a fenti színezés lehetetlen!

129. Ha egy nem-negatív egész elemekből álló mátrix minden sor- és oszlopösszege r, akkor
   a) van nem-0 kifejtési tagja;
   b) előáll r darab permutáció–mátrix összegeként.

130. HÁZASSÁG–PROBLÉMA (KŐNIG) Tegyük fel, hogy egy n lányból és n fiúból álló társaságban minden fiú pontosan r lányt (nem feltétlenül ugyanazokat) tudna elképzelni leendő feleségeként (és azok erre hajlandóak is lennének), másrészt minden lány pontosan r fiúnak nyújtaná kezét (akik azt el is fogadnák). Mutasd meg, hogy összeállítható n boldog jegyespár!

131. Mutasd meg, hogy ha egy páros gráfban minden pont foka $\leq r$, akkor pontok és élek hozzávételével kiegészíthető olyanná, amelyben minden csúcsra *pontosan* r él illeszkedik!

132. Igaz marad–e a 126. feladat, ha csak azt tesszük fel, hogy minden csúcsba *legfeljebb* r él fut be?

133. Egy 52 lapos kártya–csomagot tizenhárom négylaposra osztott valaki. Bizonyítsd be, hogy a négyesekből kiválaszthatunk egy-egy lapot, amelyek mind különböző figurák ill. számok (tehát egy–egy ász, király, ... , hármas, kettes).

... **és néhány nehezebb.**

* 134. Legyen $G(V_1, V_2, E)$ páros gráf és $X_1 \subset V_1, X_2 \subset V_2$, a csúcs–osztályok tetszőleges részhalmazai. Tegyük fel, hogy olyan (részleges) párosítás is létezik, amely fedi X_1–et és olyan (esetleg másik) is, ami X_2–t fedi. Mutasd meg, hogy ekkor van olyan is, ami fedi mindkettőt!

* 135. Bizonyítsd be, hogy minden páros gráfban létezik olyan (részleges) párosítás, ami fedi az összes maximális fokú pontot!

136. (folytatás) Adj ebből új megoldást a 132. feladatra!

DEF. Egy nem negatív elemekből álló mátrix **duplán sztochasztikus**, ha minden sor- és oszlopösszege 1.

137. Duplán sztochasztikus mátrixnak van nem-0 kifejtési tagja. $\rightarrow$

138. (folytatás) Duplán sztochasztikus mátrix permutációmátrixok (konvex) lineáris konbinációja.

* 139. Legyen G páros gráf, melynek van teljes párosítása és minden „alsó" pont foka legalább r. Bizonyítsd be, hogy G–nek legalább $r!$ különböző teljes párosítása van!

DEF. Ha egy négyzetes mátrix determinánsának kifejtési tagjait nem a szokásos előjelezéssel, hanem anélkül adjuk össze, a mátrix **permanensét** kapjuk.
VAN DER WAERDEN SEJTÉSE (Sokáig megoldatlan volt; a közelmúltban igazolta — egymástól függetlenül — FALIKMAN és JEGORICSEV): Duplán sztochasztikus mátrix permanense legalább $\frac{n!}{n^n}$.

Lefogó pontok. Kőnig tétele.

140. Egy osztályban vegyes párosokat szeretnének összeállítani az iskola tollaslabda–bajnokságára. Öt lány és öt fiú tud játszani, de nem minden szóba jöhető pár akar együtt szerepelni:
Andrisnak mindegy; játszana Flórával, Gabival, Helgával, Ildivel vagy akár Jutkával is. Balázs, Csaba, Dani és Ede viszont csak Jutkával hajlandó egy párba kerülni.
Hány párt tud az osztály kiállítani?
(Ötlet: lehet–e olyan pár, amelyikben sem Andris, sem Jutka nincs benne?)

141. Az asztalitenisz bajnokság fiú párosainak összeállítása se megy simán: a tíz ping–pongozni tudó fiúból Andris és Balázs csak Marcival akar egy párban lenni, Csaba és Dani Norbival, Ede és Karcsi pedig Oszihoz ragaszkodnak. Laci lenne Marcival, Norbival vagy akár Oszival is. Az utóbbi három bárki oldalán kiállna, akik őket választották.
Összeállítható–e öt vagy legalább négy pár?
(ötlet: kik azok, akik nélkül nincs páros?)

DEF. A G tetszőleges (tehát nem feltétlenül páros) gráf pontjainak L részhalmaza **lefogó pontrendszer**, ha minden élnek legalább egy végpontja L–ben van.

142. Legyen F a G gráf független élrendszere, L pedig lefogó pontrendszer. Mutasd meg, hogy F–ben nem lehet több él, mint ahány pontja L–nek van.
Következmény: tetszőleges gráfban legfeljebb annyi független él lehet, mint a *legkisebb* lefogó pontrendszer pontszáma.
KŐNIG TÉTELE: Páros gráfban

$$\text{független élek max. száma} = \text{lefogó pontok minimális száma}$$

143. Mutasd meg, hogy a 113. feladat (c) feltétele mellett F maximális élszámú független élrendszer! →

144. (folytatás) Igazold ebből König tételét!

Gyakorló feladatok

145. Adj meg a 117. feladat páros gráfjában egy, az éleket lefogó minimális pontrendszert!

146. Mutass példát arra, hogy Kőnig tétele nem–páros gráfokra nem igaz!

147. Vedd elő újra a vegyes párosokról szóló feladatot! Ott Balázs, Csaba, Dani és Ede csak Jutkával volt hajlandó egy párba kerülni. Mutasd meg, hogy ha egy páros gráfban ilyen eset áll elő (tehát az egyik rész négy pontja a másik résznek csak ugyanazzal az egy pontjával van összekötve), akkor — ha a négy pont egy n pontú részben van — legfeljebb $n-3$ független éle lehet a gráfnak.

148. (folytatás) Mit mondhatsz, ha egy n pontú rész valamely k pontja a másik résznek összesen csak $k-d$ pontjával van összekötve? →

149. Legyen G n–pontú páros gráf. Adj $n-d$ $(d=0,1,2,\ldots)$ független él létezésére szükséges és elégséges
   (a) Hall–típusú feltételt;
   (b) lefogó pontokra vonatkozó feltételt!

… **és néhány nehezebb.**

DEF. Tetszőleges gráfban **lefedő élrendszer**nek nevezzük élek egy halmazát, ha minden csúcsra illeszkedik közülük legalább egy.

DEF. Egy tetszőleges gráf néhány pontja **független pontrendszer**, ha nem vezet köztük él (azaz ha üres részgráfot határoznak meg).

150. n pontú gráfban a független pontok max. száma + a lefogó pontok min. száma $= n$. Továbbá, ha nincs izolált pont, akkor a független élek max. száma + lefedő élek min. száma $= n$.

151. Izolált pont nélküli páros gráfban

$$\text{független pontok max. száma} = \text{lefedő élek min. száma}$$

152. (folytatás) Mutass példát arra, hogy nem–páros gráfra az előző állítás általában nem érvényes!

2.8. Általános gráfok párosításai. Tutte tétele

153. Egy osztály mind a 20 fiú tanulója szeret pingpongozni. Egyéniben mindnyájan indulnak is az iskolai bajnokságon, de 10 párost is ki akarnak állítani. Sajnos, Karcsin és Marcin kívül — akik mindenkivel jól kijönnek — a maradék 18 gyerek négy csoportra bomlik. Egyik ilyen társaság hét tagból áll, a másik ötből, a maradék kettőben hárman–hárman vannak. Senki sincs jóban a többi csoport tagjaival, olyannyira, hogy nem is akarnak velük egy párba kerülni. Kiállítható-e azért még a tíz pár? •

DEF. A G gráf teljesíti a TUTTE–FELTÉTEL–t, ha bármely k természetes szám és tetszőlegesen választott k csúcs elhagyása után a maradék gráfban legfeljebb k összefüggő komponens pontszáma lesz páratlan.
Megjegyzés: Speciálisan $k = 0$–ra a feltétel azt is biztosítja, hogy G–nek páros számú pontja lesz.

154. Bizonyítsd be, hogy a Tutte–feltétel szükséges teljes párosítás létezéséhez! •

Megjegyzés: A feltétel elégséges is:

TUTTE TÉTELE: Tetszőleges G gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha G teljesíti a Tutte–feltételt.

Teljes gráfok faktorizációja.

155. Mutasd meg, hogy
a) $2n-1$ csapat egy teljes bajnokságot le tud játszani $2n-1$ fordulóban;
b) $2n$ csapat is le tudja játszani a teljes bajnokságot $2n-1$ fordulóban;
(Mindenki mindenkivel egyszer játszik.)

2.9. Gráfok kromatikus száma

DEF. A $G(V,E)$ gráf **jól színezhető** k színnel, ha csúcsai k osztályba oszthatók (pl. $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k = V$) úgy, hogy egy osztályon belül nem megy él, azaz $x, y \in V_i$ esetén $(x,y) \notin E$.

DEF. G **kromatikus száma** a legkisebb k, ahány színnel a gráf jól színezhető. Jelölése $\chi(G)$.

156. Mik a két színnel színezhető gráfok? →

157. Ha minden pont foka legfeljebb d, akkor a gráf $d+1$ színnel színezhető. →

158. Mutasd meg, hogy ha egy összefüggő gráfnak van szétvágó pontja, akkor kromatikus száma ugyanannyi, mint blokkjai (maximális kétszeresen összefüggő részei) kromatikus számainak maximuma. →

159. Mutass olyan gráfot,
a) amiben nincs háromszög és $\chi(G) \geq 3$;
b) amiben nincs K_4 és $\chi(G) \geq 4$;
c) amiben nincs teljes k–szög és $\chi(G) \geq k$. •

* 160. (folytatás) Minden k–ra mutass háromszög nélküli, k színnel nem színezhető gráfot!

161. Adott a síkban véges számú egyenes, melyek közül semelyik három sem megy át egy ponton. A metszéspontokat tekintsük egy gráf csúcsainak, a (véges) szakaszokat pedig éleknek. Mutasd meg, hogy a gráf három színnel színezhető! →

162. (folytatás) Igaz marad-e az állítás, ha kettőnél több egyenes is átmehet egy ponton? →

163. Ha egy összefüggő gráfban minden pont foka legfeljebb k és van kisebb fokú pont is, akkor $\chi(G) \le k$. →

BROOKS TÉTELE. *Ha egy összefüggő gráf nem teljes és minden pont foka legfeljebb k (≥ 3), akkor $\chi(G) \le k$.*

164. Mutasd meg, hogy ha egy összefüggő gráf nem teljes és legalább három pontú, akkor található benne olyan a, b, c ponthármas, melyek között pontosan két él fut. →

* 165. (folytatás) Bizonyítsd be Brooks tételét
   a) háromszorosan összefüggő gráfokra;
   b) minden gráfra.

166. Igaz-e Brooks tétele $k = 2$–re? →

Perfekt gráfok.

A továbbiakban $\omega(G)$ jelöli a G gráf legnagyobb teljes részének pontszámát (a maximális klikk–méretet).

DEF. Nevezzük a G gráfot **normálisnak**, ha $\chi(G) = \omega(G)$.
Megjegyzés: A 159. feladat szerint vannak nem normális gráfok is.

167. Az alábbi gráfok közül melyek normálisak:
   a) fák;
   b) K_n (teljes n–szögek) $n = 3, 4, 5, \dots$;
   c) „három–ház-három–kút”, csúcsai: H_1, H_2, H_3 („házak”), K_1, K_2, K_3 („kutak”), és minden H_i minden K_j–vel össze van kötve);
   d) Petersen gráf (egy öt pontú körben egy csillagötszög; a megfelelő csúcsok összekötve);
   e) páratlan körök;
   f) páratlan körök komplementerei? →

168. Mutasd meg, hogy a fák komplementerei normálisak!

169. Bizonyítsd be, hogy a következő gráfok mind normálisak:
   a) páros gráfok;
   b) részben rendezett halmaz „összehasonlítottsági gráfja”
   (az a és b elemeket akkor kötöd össze, ha vagy $a \prec b$ vagy $b \prec a$);
   c) intervallum–gráfok
   (intervallumoknak feleltess meg csúcsokat; köss össze kettőt, ha a megfelelő intervallumok egymásba metszenek).

170. (folytatás) Normálisak-e az előző feladatban szereplő gráfok komplementerei? →

DEF. $G'(V', E')$ a $G(V, E)$ **feszített részgráfja,** ha $V' \subset V$ és E' a V' pontjai között futó *összes* eredeti élből áll.

DEF. A G gráf **perfekt**, ha minden feszített részgráfja normális, azaz $\forall G' \chi(G') = \omega(G')$.

171. Bizonyítsd be, hogy az alábbi gráfok mind perfektek:
   a) fák;
   b) K_n (teljes n–szög) $n = 3, 4, 5, \dots$;
   c) páros gráfok;
   d) részben rendezett halmaz „összehasonlítottsági gráfja";
   e) intervallum–gráfok.

172. Mutasd meg, hogy egy gráf nem lehet perfekt, ha tartalmaz
   a) háromnál több pontú, átló nélküli páratlan kört;
   b) ilyen kör komplementerét.

173. Normális gráfhoz egy új pontot hozzávéve és azt minden régivel összekötve ismét normális gráf adódik.
Igaz-e ugyanez „normális" helyett „perfekt"–tel?

* 174. Perfekt gráf egy x csúcsát perfekt gráffal helyettesítve (és minden új csúcsot összekötve x minden régi szomszédjával) ismét perekt gráfot kapunk.

PERFEKT GRÁF SEJTÉS. *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha az előző feladatban szereplő a) és b) típusú részek egyikét sem tartalmazza.*

175. Mutasd meg, hogy a a 171. feladatban szereplő gráfok komplementerei is perfektek!

LOVÁSZ TÉTELE. (Régebben „gyenge perfekt gráf sejtés" volt.) *Perfekt gráf komplementere is perfekt.*

Megjegyzés: A sejtésből Lovász tétele is következne; az előbbi azonban megoldatlan.

2.10. Síkgráfok

176. Melyik gráfot tudod lerajzolni úgy, hogy élei ne messék egymást:
   a) egy kocka éleinek hálózata;
   b) K_n (teljes n–szög) $n = 3, 4, 5, \dots$;
   c) „három–ház-három–kút", csúcsai: H_1, H_2, H_3 („házak"), K_1, K_2, K_3 („kutak"), és minden H_i minden K_j–vel össze van kötve);
   d) Petersen gráf (egy öt pontú körben egy csillagötszög; a megfelelő csúcsok összekötve). →

177. (folytatás) Mi a helyzet, ha az előző négy gráf éleit (közös belső pont nélküli, tetszőleges hosszúságú) utakkal helyettesítjük? →

DEF. G **síkbarajzolható**, ha csúcsainak megfeleltethető a sík egy–egy pontja, éleinek pedig a megfelelő pontpárt összekötő folytonos görbék, amelyek nem metszik egymást.

KURATOWSKI TÉTELE. *Egy gráf akkor és csak akkor nem síkbarajzolható, ha tartalmaz olyan részt, ami K_5–ből vagy a „három–ház-három–kút"–ból keletkezik az előző feladat él–út helyettesítésével.*

DEF. A $G(V, E)$ gráfból az $\mathbf{e} \in E$ **él összehúzásával** keletkezik az a $G'(V', E')$ gráf, melyben **e** két végpontját egyetlen ponttal helyettesítjük, összekötve ezt mindazon régi pontokkal, melyekkel a két végpont valamelyike össze volt kötve G–ben.

178. Hogy függ össze G és G' síkbarajzolhatósága? •

WAGNER TÉTELE. *Egy gráf akkor és csak akkor nem síkbarajzolható, ha tartalmaz olyan részt, amiből bizonyos élek egymás utáni összehúzásával K_5 vagy a „három–ház-három–kút" keletkezik.*

Megjegyzés: Kuratowski és Wagner tételei nem ugyanazt mondják! Erre mutat példát a következő feladat:

179. Bizonyítsd be, hogy a Petersen–gráf (lásd 176.d. feladat) összehúzható öt pontú teljes gráffá, de nem tartalmaz abból él–út helyettesítéssel keletkező részt.

DEF. **Síkbarajzolt gráf** vagy **gráf síkbarajzolása:** pontok és őket összekötő, egymást nem metsző folytonos görbék.
(Egy gráfnak sok síkbarajzolása van; sok síkbarajzolt gráf tartozik hozzá.)

Megjegyzés: Igaz az is, hogy síkbarajzolható gráfnak van olyan síkbarajzolása, ahol minden él egyenes szakasz.

Jelölje egy síkbarajzolt gráf csúcsainak, éleinek és lapjainak számát rendre c, e és l.

EULER TÉTELE. *Síkbarajzolt gráfra*

$$c + l = e + 2.$$

KÖVETKEZMÉNY: Adott gráf minden síkbarajzolásában ugyanannyi a lapok száma.

180. Hány éle van egy n pontú síkgráfnak, ha minden lapja (a külső, végtelen darabot is beleértve) háromszög? →

181. Bizonyítsd be, hogy $n \geq 3$ pontú síkbarajzolható gráfnak legfeljebb $3n - 6$ éle lehet! →

182. Síkgráfnak mindig van legfeljebb ötödfokú pontja. →

183. Mutasd meg, hogy minden síkgráf jól színezhető hat színnel! •

* 184. (folytatás) Bizonyítsd be, hogy öt szín is elég!

NÉGY–SZÍN TÉTEL. *Bármely síkgráf jól színezhető négy színnel.*

Megjegyzés: Az eredeti négy–szín sejtés térképek országainak (síkgráfok lapjainak) színezhetőségére vonatkozott.

DEF. A $G(V, E)$ síkbarajzolt gráf **duálisa** a $G^*(V^*, E^*)$, ha G^* pontjai G lapjainak felelnek meg és két pontot annyi E^*–hoz tartozó él köt össze, ahány közös éle a nekik megfelelő eredeti két lapnak volt volt.

185. Mi a duálisa a következő gráfoknak (a síkbarajzolás lényegében egyértelmű):
   a) egyetlen kör;
   b) K_4;
   c) a kocka élhálózata;
   d) az oktaéder élhálózata. →

186. Mutasd meg, hogy
   a) G^* is síkbarajzolható;
   b) $e^* = e$ és $l^* = c$.
   (c, e és l rendre a gráf csúcsainak, éleinek és lapjainak számát jelöli.)

187. Lehetséges-e, hogy egy síkbarajzolható gráf különböző lerajzolásaiból különböző duálisok adódnak? →

Megjegyzés: A duális tulajdonképpen azt kódolja, milyen élek kerülnek egy–egy lapra. Úgy is mondhatnánk, hogy a nem-izomorf duálisok a *lényegesen különböző* síkbarajzolásokat reprezentálják.

188. Igaz-e, hogy $G^{**} = G$? →

* 189. Háromszorosan összefüggő síkbarajzolható gráf duálisa független a lerajzolástól.

190. A síkot véges számú egyenes sokszög–tartományokra bontja. Mutasd meg, hogy ezek a lapok két színnel színezhetők úgy, hogy szomszédosak ne legyenek egyszínűek!

191. (folytatás) Mely síkgráfokra létezik a fentihez hasonló színezés? →

192. Hány színnel színezhetőek K_4 lapjai? →

NÉGY–SZÍN TÉTEL LAPOKRA. *Minden síkgráf lapjai négy színnel színezhetőek úgy, hogy szomszédos lapok ne legyenek egyszínűek.*

193. Mutasd meg, hogy a tétel két alakja ekvivalens! →

* 194. Bizonyítsd be, hogy minden síkgráf pontjai három színnel színezhetőek úgy, hogy az egyes színosztályok által feszített részgráfok közös pont nélküli utakból álljanak!

* 195. Mutasd meg, hogy bármely síkgráf pontjai öt színnel jól színezhetőek úgy, hogy rádásul minden körön legalább három szín forduljon elő.

2.11. Hibás okoskodások

196. „Állítás”:Ha egy $2n$ pontú G gráfban minden pont foka r (az ilyen gráfokat *r–regulárisnak* nevezik), akkor G felbomlik r darab (közös él nélküli) teljes párosítás egyesítésére.
„Megoldás”:r szerinti teljes indukcióval.
   a) $r = 1$–re az állítás triviális.
   b) Tegyük fel, hogy r–re az állítás igaz. Egy r–reguláris G gráfhoz hozzávéve egy 1–reguláris F–et, $r+1$–reguláris G'–t kapunk. Mivel G az indukciós feltétel szerint r darab teljes párosítás egyesítése, F pedig maga egy teljes párosítás, így az $r+1$–reguláris G' valóban $r+1$ teljes párosítás egyesítése.
HOL A HIBA? (**VAN**!!) •

197. „Állítás”:n pontú fának $n-1$ éle van.
„Megoldás”:Indukció n szerint:
   a) $n = 1$–re (vagy $n = 2$–re) az állítás triviális.
   b) Tegyük fel, hogy n pontú fákra az állítás igaz. Vegyünk hozzá egy n pontú fához egy új élet, melynek egyik végpontja az eredeti fában van, a másik új, egy $n+1$–edik pont. Így nyilván összefüggő, körmentes gráfhoz, tehát fához jutunk. Az indukciós feltétel szerint az n pontú fának $n-1$ éle volt, ehhez vettünk hozzá még egyet; $n+1$ pontú, $n = (n+1)-1$ élű fához jutottunk.
HOL A HIBA? (**VAN**!!) •

198. „Állítás”:Ha egy n pontú gráf éleinek száma $e \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$, akkor összefüggő.
„Megoldás”:$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2}$ egy $n-1$ pontú teljes gráf éleinek száma. Ha ehhez még egy élet hozzáveszünk, mely egy eredeti pontból az n–edikbe fut, összefüggő gráfot kapunk.
HOL A HIBA? (**VAN**!!) •

199. „Állítás”:Egy (legalább két tagú) ping–pong körmérkőzés versenyzői — ha nincs olyan csoportjuk, akik mindnyájan legyőzték a másik csoport minden tagját — körbeállíthatók úgy, hogy mindenki legyőzte a tőle jobbra állót!
„Megoldás”:teljes indukció n, a versenyzők száma (vagyis a gráf pontszáma) szerint:
   I. $n = 2$–re mindenképpen van „rossz” szétvágás, tehát az állítás minden megfelelő kétpontú gráfra igaz. (Vagy $n = 3$–ra a feltétel szerint a versenyzők körbe verték egymást; van megfelelő kör)
   II. tegyük fel, hogy az n–nél kisebb számokra már tudjuk, és tekintsünk egy n–résztvevős versenyt! Vegyük ki az egyik versenyzőt, pl. a–t. A többiek az indukciós feltétel szerint megfelelően körbeállíthatók.

Ha mindenki kikapott volna a–tól (ill. ha mindenki legyőzte volna a–t), lenne „rossz” szétvágás. Legyen b olyan, akitől kikapott; innen jobbra számolva tegyük a–t az első olyan elé, akit legyőzött.

HOL A HIBA? (**VAN**!!) •

3. fejezet

Algoritmusok I.

3.1. Algoritmusok lépésszáma.

Mikor „jó” egy algoritmus?

„Ha működik” válaszolhatod első közelítésben, esetleg hozzátéve: „azaz nem kerül végtelen ciklusba, hanem befejeződik úgy, hogy a jó eredményt adja.” Valóban, enélkül egy algoritmus csak hibás lehet; kérdés, ennyi elég-e már ahhoz, hogy jónak minősítsük?

Tegyük fel, valaki azt szeretné megtudni, átgyalogolhat-e a Szaharán úgy, hogy naponta – egyik oázistól a másikig — nem több, mint harminc kilométert kelljen megtennie. Már össze is állított egy teljesnek mondható listát, melyben körülbelül kétszáz oázis szerepel, pontos fekvésükkel együtt. Az egyszerűség kedvéért számítógépre vitte az adatokat; ezek alapján szeretne most választ kapni kérdésére.

— Az egymástól harminc kilométeren belül fekvő helyek gráfját kell vizsgálnom — mormogja — az a kérdés, van-e benne út a két adott pont között? (A tervezett kiindulási- ill. célpontra gondol.) — Ezzel nagy lépést tett előre: átfogalmazta a feladatot a matematika, jelen esetben a gráfelmélet nyelvére. Lássuk, jól folytatja-e:

— Egyszerű az egész: sorra veszem a pontok minden egyes részhalmazát, mindegyiknek az elemeit minden lehetséges sorrendben; kiegészítem ezeket a kezdő- és a végponttal, végül ellenőrzöm, hogy az egymás utániak között van-e éle a gráfnak (harminc kilométernél kisebb-e a távolságuk). Ha találok ilyen részhamazt és hozzá ilyen sorrendet, megvan az útiterv; ha nem, akkor nem is lehetséges.

Ez az algoritmus nyilván megfelel az „álljon le és adjon helyes eredményt” kritériumnak. Nevezhetjük tehát jónak a módszert? Azt most ne kérdezzük, tud-e az illető hibátlan programot írni belőle; tegyük fel, hogy közben már megírta, öt–tíz pontból álló gráfokon pár perc alatt lefutott (persze a nagyobbakon lassabban). Elindította az igazi adatokon; sajnos már órák óta fut és még mindig nem állt le.

Mi lehet a probléma?

Gondolkozzunk el azon, hogy a kétszáz pontnak hány részhalmazát kell végigvizsgálni (minden lehetséges sorrendben). Ezek száma nyilván 2^{200}. Ez egy 60 jegyű (!) szám. A mai leggyorsabb számítógépek néhány százmillió utasítást hajtanak végre másodpercenként. Mennyi idő alatt végeznének ennyi műveletet? Több, mint 10^{50} másodperc alatt. Egy év kevesebb, mint 10^8 másodperc; a fizikusok a világegyetem keletkezésének időpontját húszmilliárd évvel ezelőttre teszik. Ha a mai legyorsabb gépet akkor indították volna el, azóta összesen is sokkal kevesebb, mint 10^{30} utasítást hajthatott volna csak végre. (Bizonyára észreveszed, hogy ez nem a fele az említett 10^{60}–nak; nem két, hanem 10^{30} számítógép végezhetett volna 10^{60} műveletet. Ehhez a Föld minden egyes köbmilliméterében egy–egy gépnek kellene dolgoznia.)

Vonjuk le ebből azt a következtetést, hogy a Szahara–feladat nem oldható meg számítógéppel?

Inkább azt a tanulságot szűrjük le, hogy nem mindegy, mennyi idő alatt ad jó eredményt egy eljárás. Pl. a fenti exponenciális számú (2^n) részhalmazt vizsgál, ha a pontszám n; ez közepes méretű adathalmaz esetén is elképesztően nagy lehet. Jobbak azok a módszerek, amelyek lépésszáma az adatok méretének polinomja. A továbbiakban ilyen algoritmusokat próbálunk találni — és persze ezen belül is a lehető leggyorsabbat.

Hogyan tároljunk adatokat számítógépben?

Két alapvető tárolási struktúra–típust fogunk használni: **tömböket** és **listákat**. Mindkettő leírható magasszintű programnyelveken (Magyarországon a PASCAL és a C nyelv a legismertebbek). Érdemes a gyakorlatban is megismerkedned velük bevezető programozási tankönyvek segítségével. A továbbiak azonban enélkül, önmagukban is érthetőek lesznek.

A tömbök is, a listák is bizonyos egységekből állnak; az alapvető különbség köztük a tárolás és hozzáférés módjában van.

DEF. A **tömbök** azonos méretű egységekből állnak és egyetlen összefüggő blokkban helyezkednek el, sorszámmal ellátva. Az $\mathbf{A}$ tömb i–edik elemére $\mathbf{A}[i]$–ként hivatkozhatunk.
Előnye: az egységek közvetlenül (helyük alapján) elérhetőek anélkül, hogy az őket megelőző egységeket megvizsgálnánk.
Hátránya: ha egy tömb első száz eleme pl. nagyság szerint rendezve van és egy újabbat akarunk közéjük tenni (a továbbiakban ezt **beszúrásnak** nevezzük) mondjuk középre, akkor ehhez az ötvennél nagyobb indexűeket eggyel odébb kell mozgatni. (Persze ezt felülről érdemes kezdeni.)

Megjegyzés: Többszörös indexelésű tömbök is megengedettek, pl. egy kettős indexszel ellátott $\mathbf{A}$ tömb (i, j) indexű eleme $\mathbf{A}[i, j]$. Ekkor $\mathbf{A}$–t **kétdimenziós**

tömbnek nevezzük.

DEF. A **listák** tetszőleges, nem feltétlenül azonos méretű egységekből állhatnak és elhelyezkedésükben sincs semmi rendszer. Elérni csak azáltal lehet őket, hogy minden egység a lényeges információn kívül még ú.n. **mutatót** is tartalmaz, ami a lista következő elemének helyéről szolgáltat információt. Szükség van persze egy külön mutatóra a lista első elemének megtalálásához is.
Előnye: ha új egységet akarunk beszúrni, ehhez semmit sem kell máshova mozgatnunk; elég, ha ennek mutatóját a listában majdan utána következő egységre állítjuk, a megelőzőét pedig az éppen beszúrtra.
Hátránya: egyedül az első egység érhető el közvetlenül; a többi csak úgy, ha ebből indulva végigkeressük a listát.

1. Egy tömbben ezer valós számot tárolsz 1–től 1000–ig indexelve, nagyság szerint rendezve. Arra vagy kíváncsi, szerepel-e köztük az 123456,78. A tömb hány elemét kell megvizsgálnod ennek eldöntéséhez?
(Olyan módszert keress, ami *biztosan* kevés elemet néz meg.) →
2. (folytatás) Mi a helyzet százezer elemű tömb esetén? →

3.2. A legkisebb elem kiválasztása. Rendezés.

3. Hány összehasonlítás szükséges ahhoz, hogy n darab különböző adott szám közül kiválaszd a legnagyobbat? →
4. Mutasd meg, hogy n elem rendezéséhez — ha csak összehasonlításokat végzünk — legalább $cn \log n$ művelet kell.
5. Milyen nagyságrendű a „Buborék–rendezés” lépésszáma a legrosszabb esetben?
6. Hány lépésben lehet két rendezett tömböt összefésülni? →
7. (folytatás) És összefésüléssel rendezni? →
Megjegyzés: Ennek az algoritmusnak — a jó lépésszám mellett — az is előnye, hogy könnyen megírható rekurzív hívásokkal.

3.3. Bináris fák. A kupac.

DEF. **bináris fa**: minden pontban legfeljebb kétfelé ágazik. Magassága: a gyökérből a legtávolabbi levélbe vezető út hossza.

DEF. **kiegyensúlyozott** bináris fa: a levelek mind két szomszédos szinten helyezkednek el.

8. Tíz szintből álló bináris fának hány pontja lehet? Mennyi ebből a levelek száma és mennyi az elágazási pontoké!

9. Milyen összefüggés van (nem feltétlenül kiegyensúlyozott) bináris fa elágazási ponjainak ill. leveleinek száma között?

10. Egymillió elemű kiegynsúlyozott bináris fa milyen magas?
Olyan struktúrát definiálunk, ami jelentősen meggyorsítja (számítógépekben) az adatok tárolását, ha az a cél, hogy a tárolt számok közül bármikor gyorsan kikereshessük a legkisebbet, továbbá (ugyancsak gyorsan) törölhessünk, csökkenthessünk és újabbakat szúrhassunk be. (Ha a *legnagyobb* szám folyamatos nyilvántartása a cél, akkor az egyenlőtlenségek értelemszerűen megfordulnak.)

DEF. **Kupac:** (ez az angol nyelvű irodalomban szokásos „heap" kifejezés fordítása; magyarul használják a „piramis" elnevezést is.) Olyan súlyozott csúcsú, majdnem teljes bináris fa, melyben, ha az x csúcs leszármazottai y_1 és y_2, akkor $w(x) \leq w(y_1), w(y_2)$. (Ekkor a minimális w nyilván mindig a gyökérben lesz.)
Megjegyzés: Egy kupac tárolása különösen egyszerű: tarthatjuk egy tömbben, ahol az i–edik elem gyerekei a $2i$–edik és a $2i+1$–edik; szülője az $\lfloor i/2 \rfloor$–edik.

11. Mutasd meg, hogy n csúcsú kupacban a törlés, csökkentés és új elem hozzávétele $c \cdot log_2 n$ lépésben megvalósítható! •

* 12. n számból $c \cdot n$ lépésben (!) lehet kupacot építeni. •

13. Rendezz n elemet, kupacokat használva, $cn \log n$ időben!

II. RÉSZ

ami talán már újdonság.

4. fejezet

Leszámlálás II.

4.1. Újabb példák rekurziókra

A Stirling–számok

DEF. Jelölje $S(r,k)$ azt, hányféleképpen vághatunk egy r elemű halmazt k darab *nem–üres* részre! Például az $\{a,b,c\}$ halmaz két részre vágásai:

$$\begin{array}{rl} \{a,b\} & \{c\} \\ \{a,c\} & \{b\} \\ \{a\} & \{b,c\}, \end{array}$$

tehát $S(3,2)=3$.

1. a) $S(r,2)=?$
   b) $S(r,r-1)=?$ •
2. Keress rekurziót $S(r,k)$–ra és készíts táblázatot az $r \le 6$ értékekre! •
3. Hány különböző módon oszthatunk szét r különböző tárgyat k különböző színű hátizsákba úgy, hogy egy zsák se maradjon üres? Fejezzük ki a választ
   a) a szita–formulával;
   b) $S(r,k)$ segítségével! •
4. Bizonyítsd be, hogy

$$S(r,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^r.$$

→

5. Mutasd meg, hogy $S(r+1,k+1) = \sum_{p=k}^{r} \binom{r}{p} S(p,k)$.
6. Bizonyítsd be, hogy az $a_n = n^r$ sorozatra (itt r rögzített természetes szám) $\Delta^k a_0 = k!\, S(r,k)$. →
7. (folytatás) Igazold, hogy $n^r = \sum_{k=1}^{r} S(r,k)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

4.2. Tükröm, tükröm ...

8. Billy, a cowboy egy egyenes folyópart közelében lakik. Reggel felül a lovára, hogy a víznél megitassa; utána Maryhez szándékozik lovagolni, aki kissé távolabb, de a folyón innen lakik. Hogyan kereshetjük meg a legrövidebb „Billy–folyópart–Mary” utat? →
9. Az origóból mindig jobbra ill. felfelé szomszédos rácspontokra egységnyit lépve hányféleképp juthatunk el (7,11)–be, ha sose léphetünk olyan helyre, ahol $y = x - 3$? •
10. Az Óperenciás tenger közepén találjuk a Catalan–szigeteket. Meseország felől hajózva már messziről feltűnnek a szinte megmászhatatlan, pontosan 45 fokos korall–szirtek körvonalai. Érdekessége a csoportnak, hogy az érkező hajóról minden szigethegy gerincének vonala hat darab 1 km–es szakaszból áll (pl. fel–le–fel–fel–le–le sorrendben; ezt a szigetet tehát két, éppen a tengerszinten érintkező hegy alkotja), és az összes, ilyen típusú szigetből pontosan egyet lát az utazó.
   a) Hány szigetből áll a csoport?
   b) és ha a gerinc–vonalak 8 km–esek? →
11. 15 fiú és 12 lány hányféle sorrendben mehet be a táncterembe, ha sosem lehet több lány odabent, mint fiú? →
12. Egy mozi pénztáránál $2n$ gyerek áll sorba 10 Ft–os jegyekért. Közülük n–nek tizese, a másik n–nek egy–egy huszasa van. A kasszában nincs váltópénz. Hány olyan sorrendje van a gyerekeknek, amikor a sor nem akad el, a pénztáros mindig tud visszaadni? →
13. (folytatás) Jelöljük az előző feladat eredményét C_n–nel! Mutasd meg, hogy

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_iC_{n-i-1} + \ldots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0$$

•

DEF. A fenti C_n–eket **Catalan–számok**-nak nevezzük. $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, \ldots$.

14. Bizonyítsd be, hogy $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
15. Egy n centiméteres pálcát hányféleképpen törhetünk 1 cm–es darabokra, ha
   a) egy lépésben mindig egy 1 cm–nél hosszabb darabot törünk két részre?
   b) egy lépésben mindig az összes, 1 cm–nél hosszabb darabot két részre törjük?
16. A rácspontos feladat milyen esetben vezet Catalan–számokra?
17. Egy 2n oldalú szabályos sokszög csúcsait hányféleképp lehet páronként közös pont (és végpont) nélküli szakaszokkal (oldalakkal vagy átlókkal) összekötni?

18. Egy 10 tényezős szorzat hányféleképp zárójelezhető, hogy minden zárójelben egy újabb szorzás legyen kijelölve?
19. Hányféleképp lehet egy n oldalú konvex sokszöget nem metsző átlókkal háromszögekre bontani?
20. Hány olyan $f : n \mapsto n$ monoton függvény van, ami minden $1 \le i \le n$–re teljesíti az $f(i) \le i$ feltételt?
21. Expedíció indul az Antarktiszra; egy év alatt szándékoznak körüljárni. A szükséges élelmiszert a tervezett útvonal mentén — néhány heti adagokra osztva — már előre elhelyezte egy szállító repülőgép. (Az utolsó menetben, amikor az embereket, síléceket, szánokat és kutyákat viszi, más már nem fér a gépbe.) Induláskor jut eszükbe: nem ellenőrizték, kitart-e minden útszakaszon az élelem a következő tartalék–raktárig.
    a) Nyugtasd meg őket! Igazold, hogy van olyan hely, ahonnan indulva mindig lesz náluk elég élelem (feltéve, hogy körútjukat tényleg befejezik egy év alatt.)
    b) Mutasd meg azt is, hogy ha az előre elhelyezett mennyiség egy heti adaggal több a szükségesnél, akkor olyan hely is van (és *pontosan egy!*), ahonnan indulva mindig lesz náluk legalább egy egész heti tartalék.

* 22. Tegyük fel, hogy egy csupa $+1$ és -1 tagokból álló sorozat összege éppen 1. Mutasd meg, hogy *pontosan egy* olyan ciklikus permutációja van, melyben minden kezdőszelet (azaz minden $i \le n$–re első i tag összege) pozitív.

23. (folytatás) Igazoljuk, hogy azon $2n+1$ elemű, ± 1 tagokból álló sorozatok száma, melyben a teljes összeg 1 és minden kezdőszelet összege pozitív (itt nincs permutáció), $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$.
    (Mi köze ezeknek a Catalan–számokhoz?)
24. Hány olyan sorozat képezhető n darab $+1$ és n darab -1 felhasználásával, melyben minden részletösszeg ≥ 0?

* 25. n hangya mászik egy szűk járatban, melyből közepen egy „zsákutca" ágazik ki. A járat és a mellékág olyan keskenyek, hogy két hangya már nem fér el egymás mellett, nem előzheti egyik a másikat. (Persze, aki bemegy a zsákutcába, azt akárhányan meg tudják előzni.) A főágban folyamatos a haladás, semelyik sem fordul vissza. Hányféle különböző sorrendben jöhetnek ki?

* 26. Hány n levelű *sűrű* bináris fa van? (Egy r pontban gyökerező bináris fa sűrű, ha minden pontban, ami nem levél, pontosan kétfelé ágazik.)

4.3. Találjunk rekurziót ...

Próbálj rekurzív összefüggéseket találni a következő feladatokra! (Megoldanod most nem kell őket. Ha találtál rekurziót, és a megoldása is érdekel, nézd meg a „Lineáris rekurziók"–nál vagy a „Generátorfüggvények"–nél!)

27. A „Hanoi torony probléma”: A legenda szerint Hanoi–ban egy kolostorban a lámák egy falapból felfelé kiálló három rudacska egyikére fűzve $n = 100$ darab különböző méretű, középen lyukas korongot kaptak Buddhától. Legalul volt a legnagyobb, felette a többi egyre kisebb és kisebb. Azt a feladatot adta nekik, hogy juttasssák a korongokat valamelyik másik rudacskára úgy, hogy közben egyszerre csak egyet tehetnek át, és semelyiket sem szabad *nála kisebbre* helyezni. Nem könnyű a lámák dolga (a legenda szerint mire befejezik, eljön a világ vége). A Ti feladatotok egyszerűbb: a_n–nel jelölve az n korong esetén szükséges lépésszámot, keress rekurziót a_n–re! $\rightarrow$

28. Tegyük fel, hogy egy számítógép– program egy n elemű S struktúrát kezelő **Rutin**(n, S) eljárást („szubrutint”) használ, ami némi előkészítés után (ha $n \geq 1$) meghívja saját magát három kisebb struktúrára, majd ha ennek vége, némi befejező műveletek után leáll. Kb. úgy néz ki, mint

```
Procedure Rutin(n, S);
Begin
If n ≥ 1 then
      begin
      előkészítés;
      Rutin(n − 1, S1);
      Rutin(n − 1, S2);
      Rutin(n − 1, S3);
      befejezés;
      end;
end;
```

Ha n méretű S struktúrán az előkészítés és a befejezés együtt $k \cdot n$ lépés, hány lépés a **Rutin** teljes futása? Keress rekurziót! $\rightarrow$

29. Egy turista Bergengóciában minden nap egyet vásárol a következőkből (amíg a pénze tart):

fagylalt	1	tallér
csoki	2	tallér
gyümölcslé	2	tallér

Hányféleképpen költhet el n tallért? $\rightarrow$

* 30. Jelölje S_n az olyan $f : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ függvények számát, melyek értékkészlete *kezdőszelet*, azaz ha f valahol felvesz valamilyen y értéket, akkor felvesz minden $1 \leq z \leq y$–t is. (Legyen $S_0 = 1$.) Keress rekurziót S_n–re! •

31. n egyenes legfeljebb hány részre vágja a síkot?

32. n sík legfeljebb hány részre vágja a teret?

33. Egy zárt n oldalú töröttvonal legfeljebb hány pontban metszheti önmagát?

34. Egy konvex n -szög semelyik 3 átlója sem megy át egy ponton. Hány átlómetszéspont van?

4.4. Lineáris rekurziók

Elsőrendű rekurziók.

DEF. Az **elsőrendű lineáris rekurziók** általános formája (ahol tehát a_n a korábbi tagok közül csak a_{n-1}–től függ, és attól is lineárisan) a következő:

$$a_n = \lambda(n) \cdot a_{n-1} + b(n).$$

DEF. Ha λ és b konstansok, akkor a rekurzió **állandó együtthatós**.

35. Legyen a_0 tetszőleges. Mi a fenti rekurzió megoldása, ha
    a) $\lambda(n) = n$, $b(n) = 0$;
    b) $\lambda(n) = 2$, $b(n) = 0$? →

36. Ha $\lambda(n) = 1$, a_0 és a $b(n)$–ek pedig tetszőlegesek, mennyi lesz a_n? →

37. (folytatás) Ha a főegyüttható állandó: $\lambda(n) = \lambda \neq 1$, vezesd vissza a feladatot az előzőre az

$$A_n := \frac{a_n}{\lambda^n}$$

    függvény segítségével!
    Megjegyzés: Az ötlet onnan származik, hogy ha $b_n = 0$ lenne, $a_n = a_0\lambda^n$ volna. →

38. A Hanoi torony problémára (lásd 27. feladat) az $a_0 = 0$, $a_n = 2a_{n-1}+1$ rekurzió adódott. Oldd meg ezt a fenti módszerrel! →

39. Oldd meg az $a_0 = 0$, $a_n = 2a_{n-1} + n$ rekurziót! →

40. A háromszor önmagát hívó eljárás lépésszámára (28.c) feladat) a $c_0 = 0$, $c_n = 3c_{n_1} + k \cdot n$ rekurzió adódott. Milyen nagyságrendű a lépésszám? →

41. Ha egy *nem* állandó együtthatós feladatban $b_n = 0$; mennyi lesz a_n? →

* 42. (folytatás) Hogy lehet visszavezetni (v.ö. 37. feladat) a nem állandó együtthatós problémát olyanra, ahol λ *állandó*? →

43. $a_0 = 0$, $a_n = n \cdot a_{n-1} + \binom{n}{2}$. Mekkora az n–edik tag? →

44. Oldd meg az $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot a_n + (n^2 - 1)$ rekurziót! •

Másodrendű rekurziók

45. Az a_n sorozatot az $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ rekurzió definiálja. Mi az általános tag, ha a kezdőtagok:
   a) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;
   b) $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;
   c) $a_0 = 2$, $a_1 = 5$;
   d) $a_0 = 8$, $a_1 = 17$?
   e) Hogyan lehet kitalálni a rekurzióból, melyik mértani sorozatok a „főszereplők"?

46. $a_n = 11a_{n-1} - 28a_{n-2}$.
   a) Van-e jó mértani sorozat?
   b) $a_0 = 3$, $a_1 = 18$ esetén mi az általános tag?

A következőkben *állandó együtthatós, konstans tagot nem tartalmazó (azaz „homogén")* lineáris másodrendű rekurziókkal fogunk foglalkozni, melyek általános alakja

$$x_n = a \cdot x_{n-1} + b \cdot x_{n-2}.$$

Megjegyzés: Például a Fibonacci–számok rekurziója ilyen. A megoldási módszer is az ott látottra emlékeztet:

47. Keress olyan nem azonosan 0 *mértani* sorozatokat, amelyek kielégítik a fenti rekurziót! →

DEF. A

$$q^2 - aq - b = 0$$

egyenletet a rekurzió **karakterisztikus egyenletének** nevezzük.

48. Mutasd meg, hogy ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző (valós vagy komplex) gyöke van, akkor bárhogyan megadva x_0–t és x_1–et, a rekurzió megoldása két (valós vagy komplex hányadosú) mértani sorozat összegeként írható! →

49. (folytatás) Bizonyítsd be, hogy ha csak egyetlen q megoldás van, akkor $n \cdot q^n$ is kielégíti a rekurziót! Milyen alakban kereshető x_n? →

50. Oldd meg az $x_0 = 3$, $x_1 = 8$, $x_n = 4(x_{n-1} - x_{n-2})$ rekurziót! →

51. Oldjuk meg az $a_0 = 1$, $a_1 = 2k$, $a_n = 2k \cdot a_{n-1} - k^2 \cdot a_{n-2}$ rekurziót!

52. n darab (egyforma) étkezési szelvényünk van, melyeket k étteremben költhetünk el. Bármely helyen ehetünk két utalványért bőséges ebédet vagy – egy hely kivételével — egyszerűbbet egy utalványért. Ha az éttermek sorrendje is számít, hányféleképpen használhatjuk fel az összes utalványt?

* 53. Léteznek-e olyan $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a_0, a_1, a_2, a_3$ egész számok, hogy az $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma a_{n-3} + \delta a_{n-4}$ rekurzió korlátos, de nem periodikus sorozatot definiál?

* 54. Adjunk meg olyan α, β, a_0, a_1 valós számokat, hogy az $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ rekurzió korlátos, divergens, de nem periodikus sorozatot definiáljon!

4.5. Generátor–függvények

Sokat markolunk (és sokat is fogunk).

Legyen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tetszőleges sorozat. Ennek végtelen sok elemére vonatkozó *összes információ* belefér egyetlen függvénybe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

DEF. A fenti $f(x)$ az a_n sorozat **generátor–függvénye**.
Megjegyzés: Analízisből (lásd Taylor–sorok) ismert, hogy f–ből az a_n együtthatók egyértelműen meghatározhatóak, ha a végtelen sor nemcsak $x = 0$–ra konvergens. Ekkor a konvergencia–tartomány egy (esetleg végtelen) intervallum, és a sor tagonként differenciálható és integrálható.

DEF. Az a_n sorozat **exponenciális** generátor–függvénye:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

Megjegyzés: Az a_n együtthatók g–ből is egyértelműen visszanyerhetőek; az előző megjegyzés minden egyes állítása érvényes g–re is.
Az alábbi feladatokat az x helyébe alkalmas függvényt helyettesítve, esetleg deriválással ill. integrálással oldhatod meg, felhasználva, hogy a végtelen mértani sor összege ismert: $|x| < 1$ esetén

$$1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

illetve abból, hogy

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

55. Határozd meg az $a_n = 2^n$ sorozat
   a) generátor–függvényét;
   b) exponenciális generátor–függvényét! $\rightarrow$

56. Legyen $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2}$, ha $n \geq 2$.
   (a) Írjuk fel az (a_n) sorozat $g(x)$ generátorfüggvényét közvetlenül a rekurzióból!
   (b) Fejtsük sorba $g(x)$-et és így határozzuk meg a_n–et!

57. Minek a generátor–függvénye
   a) $\frac{1}{1+x}$;
   b) $\frac{1}{1-3x}$;
   c) $\frac{1}{1-x^2}$;
   d) $\frac{1}{1+x^2}$? →

58. Minek az exponenciális generátor–függvénye e^{x^2}? →

59. Keresd meg $\dfrac{1}{2x+3}$ hatványsorát! →

60. Milyen hatványsor állítja elő $\dfrac{1}{(1-x)^2}$–t? →

* 61. (folytatás) Hát $\dfrac{1}{(1-x)^r}$–t? →

62. Minek a generátorfüggvénye
   a) $\dfrac{1}{1-4x+4x^2}$;
   b) $\dfrac{1}{x^2-10x+25}$? →

63. Az $\dfrac{x}{(1+x)(1+3x)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1+x)} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1+3x)}$ azonosság felhasználásával keresd meg a bal oldal hatványsorát! →

64. (folytatás) Keress hasonló felbontást (és abból hatványsort) az $\dfrac{1}{(1+x)(1+3x)}$ függvényhez is! •

65. Melyik sorozat generátorfüggvénye
   a) $\dfrac{1}{1-3x+2x^2}$;
   b) $\dfrac{1}{x^2+5x+6}$?

Fibonacci és a turista

Különösen jól használhatók a generátor–függvények rekurzív sorozatok n–edik tagjának explicit felírására.

66. Mutasd meg, hogy a Fibonacci–sorozat f generátorfüggvénye teljesíti az $f(x) = 1 + xf(x) + x^2 f(x)$ egyenlőséget! Adj ebből új bizonyítást az

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

azonosságra!

67. Határozd meg $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n$-t!

68. A Bergengóciába látogató turista (29. feladat) rekurziója: $t_0 = 1$, $t_1 = 1$, $t_n = t_{n-1} + 2t_{n-2}$. Bizonyítsd be, hogy a sorozat generátor–függvényére $f(x) = 1 + xf(x) + 2x^2 f(x)$ teljesül és adj ebből képletet t_n–re!

69. Oldd meg az 50. feladatot generátor–függvénnyel is!

* 70. A 30. feladatban az $S_0 = 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k}$ (ha $n \geq 1$) rekurzióra jutottunk. Mutasd meg, hogy S_n *exponenciális* generátor–függvénye

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{n!} x^n = \frac{1}{2 - e^x},$$

és bizonyítsd be ebből, hogy

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}.$$

•

71. Jelölje $P_{\leq k}(n)$ az n természetes szám felbontásainak számát pozitív egészek összegére, melyek mindegyike legfeljebb k. Biz be:

$$p_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} P_{\leq k}(n) x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}.$$

72. Jelölje $P_{\max=k}(n)$ az n természetes szám felbontásainak számát pozitív egészek összegére, melyek közül a legnagyobb éppen k. Biz be:

$$p_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} P_{\max=k}(n) x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}.$$

73. Jelölje $P(n,k)$ az n természetes szám felbontásainak számát k darab pozitív egész összegére.

$$P(n,k) = \sum_{i=1}^{k} P(n-k,i).$$

74. Biz be:

$$p_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} P(n,k) x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}.$$

* 75. Bizonyítsd be, hogy minden n természetes számra a csupa különböző összeadandóból álló összegelőállítások száma egyenlő a csupa páratlan összeadandóból álló összegelőállítások számával. (Az összeadandók sorrendje nem számít.)

5. fejezet

Gráfok II.

5.1. A Ramsey–tételkör (Pósa Lajos nyomán)

Végtelen Ramsey–tételek.

1. Legyen H a természetes számok tetszőleges végtelen részhalmaza (ha úgy tetszik, szigorúan növő részsorozata). Mutasd meg, hogy
   vagy van H–ban végtelen sok szám (nem kell az egész H), amelyek közt bármely kettőnek van egynél nagyobb közös osztója,
   vagy van benne végtelen sok, páronként relatív prím (azaz olyanok, hogy e részben bármely kettő legnagyobb közös osztója egy).
2. Legyen H olyan, mint az előző feladatban! Mutasd meg, hogy
   vagy van benne végtelen sok szám, hogy bármely kettő osztja egymást,
   vagy van végtelen sok, hogy semelyik kettő nem osztója egymásnak!
3. Mit mondhatunk, ha végtelen sok pont között minden párt vagy piros, vagy kék színnel összekötünk? →
4. Mit mondhatunk, ha végtelen sok pont között bizonyos párokat összekötünk (feketével), bizonyosakat pedig nem? →
5. RAMSEY TÉTELE végtelen gráfokra: Végtelen teljes gráf (jelölése: K_∞) éleit tetszőlegesen színezve két színnel, mindenképpen keletkezik egyszínű élekből álló K_∞. •
   Átfogalmazás: bármely végtelen gráfban van vagy végtelen teljes, vagy végtelen üres részgráf.

Ramsey tételei véges gráfokra.

6. Egy hatszög oldalait és átlóit (összesen 15 vonalat) tetszőlegesen piros és kék színekkel húztál be. Mutasd meg, hogy
   a) bármely csúcsból indul három egyszínű vonal.
   b) biztosan rajzoltál három egyszínű vonalból álló háromszöget.

7. Igaz–e ugyanez ötszögre? És hét– vagy több oldalúra?

* 8. Mutasd meg, hogy n pont között a párokat pirossal és kékkel összekötve legalább $\dfrac{n(n-1)(n-5)}{24}$ darab, három egyszínű vonallal határolt háromszög keletkezik!

9. Tizenhét tudós három témáról folytat levelezést egymással (bármely kettő mindig ugyanarról, de egy harmadik írhat az első kettőnek két különbözőről). Bizonyítsd be, hogy van köztük három, akik páronként ugyanarról leveleznek!

* 10. Mutasd meg, hogy 16 tudósra az állítás nem igaz! →

DEF. n pontú **teljes gráf** (jelölése: K_n): minden pont minden másikkal össze van kötve.

Ramsey tétele véges gráfokra: Tetszőleges k és l természetes számokhoz van olyan $R(k,l)$, hogy egy $n \geq R(k,l)$ pontú teljes gráf éleit két osztályba osztva (pl. pirossal és kékkel megrajzolva) biztosan keletkezik vagy az egyik típusú (piros) élekből K_k, vagy a másik típusú (kék) élekből K_l.
Átfogalmazás: bármely, legalább $R(k,l)$ pontú gráfban vagy van k pontú teljes, vagy van l pontú üres részgráf.

DEF. Adot k és l esetén a *legkisebb* $R(k,l)$–et $R^*(k,l)$–lel jelöljük.

11. Mutasd meg, hogy ha $R(k-1,l)$ és $R(k,l-1)$ létezik, akkor $R(k,l)$ is, és $R^*(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)$.

12. (folytatás) Bizonyítsd be Ramsey tételét és mutasd meg, hogy $R^*(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$. •

13. Mennyi $R^*(3,3)$? →

14. Mutasd meg, hogy $R^*(3,4) = 9$. (Nem sajtóhiba! A ≤ 10 triviális, lásd 12. feladat.) •

15. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges k és l természetes számokhoz van olyan $M(k,l)$, hogy egy $n \geq M(k,l)$ tagú sorozatban mindig található k tagú növekvő vagy l tagú csökkenő részsorozat! →

16. Egyszerűen igazolható, hogy a d dimenziós térben legfeljebb $d+1$ olyan pont adható meg, melyek között a fellépő összes távolság egyenlő. Megadható–e végtelen sok, ha megengedünk két különböző távolságot (de többet nem)? •

17. Mutass olyan $(k-1)^2$ pontú gráfot, amelyben nincs se teljes, se üres k–pontú rész!

* 18. (folytatás) Mutass hasonlót $\binom{k-1}{3}$ ponton is!

19. (folytatás) Bizonyítsd be, hogy 2^{2k} ponton ez lehetetlen! →

Erdős tétele:

$$2^{k/2} < R^*(k,k) < 2^{2k}.$$

Megjegyzés: A felső becslés egyszerű: l. előző feladat. Az alsó becslés volt az első, valószínűségszámítást használó eredmény a gráfelméletben.

20. Mutasd meg, hogy ha

$$2 \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} < 2^{\binom{n}{2}},$$

akkor az n pontú gráf élei két színel színezhetőek úgy, hogy ne keletkezzen egyszínű K_k! →

21. (folytatás) Bizonyítsd be ebből Erdős alsó becslését! →
SEJTÉS (megoldatlan): létezik

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{R^*(k,k)}.$$

Megjegyzés: Erdős tétele szerint $\sqrt{2} < \sqrt[k]{R^*(k,k)} < 4$.

Ramsey tételei több színre.

VÉGTELEN RAMSEY TÉTEL TÖBB SZÍNRE: Legyen $s \geq 2$ természetes szám. K_∞ éleit s színnel színezve mindenképpen keletkezik csupa egyszínű élből álló K_∞.

VÉGES RAMSEY TÉTEL TÖBB SZÍNRE: Tetszőleges s és $k_1, k_2, \ldots, k_s$ természetes számokhoz van olyan $R_s(k_1, k_2, \ldots, k_s)$, hogy egy $n \geq R$ pontú teljes gráf éleit s osztályba osztva (pl. pirossal, kékkel, ... , összesen s színnel megrajzolva) biztosan keletkezik vagy az első típusú (piros) élekből K_{k_1}, vagy a második típusú (kék) élekből K_{k_2}, ..., vagy vagy az s–edik típusú élekből K_{k_s}.

DEF. A legkisebb ilyen R–et $R_s{}^*(k_1, k_2, \ldots, k_s)$–sel jelöljük.

22. Bizonyítsd be a többszínű Ramsey–tételeket! →

* 23. Mutasd meg, hogy

$$R_s^*(3,3,\ldots,3) \leq 1 + s!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{s!}) = \lceil e \cdot s! \rceil$$

* 24. (SCHUR TÉTELE) Minden s–hez van olyan $N(s)$, hogy az $1, 2, \ldots, N$ számokat bárhogyan osztva s osztályba, valamelyikben megoldható lesz az

$$x + y = z$$

egyenlet. (Ez azt jelenti, hogy legalább egy osztályban található három — nem feltétlenül különböző — szám, x, y és z, melyekre a fenti egyenlőség teljesül. A tételben szereplő minden betű — s, N, x, y, z — pozitív egész számot jelent.) •

A véges és végtelen közötti kapcsolat. A König–lemma.

25. Mutass olyan végtelen pontú gyökeres fát, melyben a gyökérből indulva található akármilyen hosszú út (azaz van 10–nél hosszabb is, van 10^{10}–nél hosszabb is, stb.), de *végtelen* út nincs! →

DEF. Egy r pontban gyökerező fa k–adik szintjének nevezzük az r–től k távolságra lévő (k élű úton elérhető) pontok halmazát.

KÖNIG–LEMMA: Ha egy végtelen fa minden szintje nem-üres és véges számú pontból áll, akkor van a fában végtelen út.

* 26. Igazold a fenti állítást! →

* 27. Mutasd meg, hogy a végtelen Ramsey tételekből a König–lemma segítségével a véges Ramsey tételek is következnek! •

Gyakorló feladatok

28. Mondjuk azt, hogy egy (döntetlen nélküli) körmérkőzés eredménye a játékosok egy $\{J_1, J_2, \dots J_r\}$ részhalmazán egyértelmű, ha $i < k$ esetén J_i legyőzte J_k–t.
    a) Bizonyítsd be, hogy minden r–hez van olyan $f(r)$, hogy bármely $n \geq f(r)$ résztvevős körmérkőzés után lesz r olyan versenyző, akik halmazán az eredmény egyértelmű;
    b) Igaz-e, hogy 2^{r-1} játékos között mindig van r ilyen? →

29. Mutasd meg, a „végtelen Ramsey tétel"–ből hogyan következik, hogy minden végtelen sorozatnak van végtelen monoton részsorozata! •

30. Bizonyítsd be, hogy $k \cdot l + 1$ tagú sorozatban mindig található k tagú növekvő vagy l tagú csökkenő részsorozat! →

31. $\frac{s(s+1)}{2}$ ember gyűlt össze valahol. Bármely hármat kiválasztva, van ezek között legalább kettő, akik ismerik egymást. Mutasd meg, hogy biztosan van s ember, akik egymást mindnyájan ismerik! (Az ismeretségek kölcsönösek.)

32. Legyen adva végtelen sok tengely–párhuzamos téglalap csupa egész koordinátájú csúcsokkal az első (azaz jobb felső) síknegyedben úgy, hogy mindegyikük bal alsó csúcsa az origó. Igazoljuk, hogy kiválasztható belőlük végtelen sok olyan, melyek között bármely kettőből az egyik tartalmazza a másikat!

Számtani sorozatok. Van der Waerden tétele.

33. Bontsuk fel a természetes számok halmazát két részre úgy, hogy egyik se tartalmazzon végtelen számtani sorozatot!

34. (folytatás) Ugyanez a feladat mértani sorozatokra.

VAN DER WAERDEN TÉTELE: Legyen k tetszőleges nem-negatív egész. A természetes számok halmazát akárhogyan véges sok részre osztva valamelyik részben lesz k tagú számtani sorozat.

Megjegyzés: Érdemes felfigyelni arra, hogy — bár akármekkora véges részsorozat van — végtelen nem feltétlenül lesz. (Lásd 33. feladat.)

Euklideszi Ramsey–tételek.

35. A sík pontjait (egyenként külön, tetszőlegesen) kiszínezte valaki pirosra, sárgára és kékre. Mutasd meg, hogy mindenképpen keletkezett egyszínű, egymástól egységnyi távolságban lévő pontpár! $\rightarrow$

36. (folytatás) Mutasd meg, hogy az előző állítás kilenc színre nem igaz! $\rightarrow$

37. (folytatás) Mi a helyzet hét színnel? $\rightarrow$

38. Színezd ki a sík pontjait *két* színnel úgy, hogy semelyik egység-oldalú szabályos háromszögnek se legyen mind a három csúcsa egyszínű! $\rightarrow$

SEJTÉS (megoldatlan): Az előző feladatnak megfelelő bármely színezésben bármely $0 < a \neq 1$–hez található a oldalú szabályos háromszög csupa egyszínű csúcsokkal.

39. Tegyük fel, hogy a sík pontjait kiszínezte valaki pirosra és kékre úgy, hogy mindkét színt használta. Mutasd meg, hogy mindenképpen keletkezett egymástól egységnyi távolságban lévő pontpár, melynek egyik tagja piros, a másik kék! $\rightarrow$

5.2. Extremális gráfok

Cseresznyék, körök, háromszögek ...

40. Egy G gráfban *cseresznyé*nek nevezünk két, egy pontból induló élt (azaz egy két élből álló utat, ha úgy tetszik).
    a) Ha G–nek n pontja van, melyekre rendre $d_1, d_2, \dots d_n$ él illeszkedik, hány cseresznye van G–ben?
    b) n pontú, e élű gráfban legalább hány cseresznye van?
    c) Mutasd meg, hogy ha egy n pontú, e élű gráfban nincs háromszög, akkor legfeljebb $\frac{e(n-2)}{2}$ cseresznye lehet benne.
    d) Bizonyítsd be, hogy egy n pontú, háromszögmentes gráfnak legfeljebb $\frac{n^2}{4}$ éle van!
    e) Mutass (minden n–re) n pontú, $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ élű, háromszögmentes gráfot!
41. (folytatás) Tegyük fel, hogy G–ben nincs négy pontú kör!
    a) Mutasd meg, hogy G–ben legfeljebb $\binom{n}{2}$ cseresznye lehet!
    b) Igazold, hogy G–nek legfeljebb $\frac{1}{2}n^{3/2} + \frac{1}{4}n$ éle lehet!
    *c) Mutass végtelen sok n–re olyan n pontú gráfot, amelyben nincs négy pontú kör és legalább $\frac{1}{2}n^{3/2} - \sqrt{n}$ éle van!

Turán tétele

DEF. Jelölés: $\lfloor x \rfloor$ jelentse az x **egész részét**, azaz a legnagyobb, x–nél nem nagyobb egészt.

DEF. r**–osztályú gráf**: a pontokat tetszőlegesen r osztályba osztjuk és a különböző osztályba eső pontpárokat mind összekötjük.

DEF. n–pontú r–osztályú **Turán–gráf** úgy keletkezik, hogy az n pontot a lehető legegyenletesebben r osztályba osztjuk (ezek egyenként n/r pontot tartalmaznak, ha ez egész szám; $\lfloor n/r \rfloor$–t ill. $\lfloor n/r \rfloor + 1$–et, ha nem) és a különböző osztályba eső pontpárokat mind összekötjük.
Az r–osztályú n pontú Turán–gráf éleinek számát $T_r(n)$–nel jelöljük.

42. Igazold, hogy az n–pontú páros gráfok közül a kétosztályú Turán–gráfnak van a legtöbb éle! Mondj hasonló állítást az r–osztályú Turán–gráfokra is!

•

Állítás: az n–pontú r–osztályú gráfok között a Turán–gráfnak van a legtöbb éle.

43. Mutasd meg, hogy

$$
\begin{aligned}
T_2(n) &= \begin{cases} k^2 & \text{, ha } n = 2k; \\ k(k+1) & \text{, ha } n = 2k+1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} n^2/4 & \text{, ha } n \text{ páros;} \\ (n^2-1)/4 & \text{, ha } n \text{ páratlan.} \end{cases} \\
&= \lfloor n^2/4 \rfloor
\end{aligned}
$$

44. Igazold, hogy ha egy n pontú gráfban nincs háromszög, akkor élszáma

$$e \leq T_2(n) = \lfloor n^2/4 \rfloor.$$

•

45. Keress $T_3(n)$–re a fenti, $T_2(n)$–re vonatkozóhoz hasonló képleteket! →

46. Bizonyítsd be, hogy ha egy n pontú gráfban nincs K_4 (teljes négypontú részgráf), akkor élszáma

$$e \leq T_3(n) = \lfloor n^2/3 \rfloor.$$

→

TURÁN TÉTELE. *Ha egy n–pontú gráf nem tartalmaz K_{r+1}–et (teljes r+1–pontú részgráfot) akkor legfeljebb $T_r(n)$ éle lehet.*

DEF. Azt mondjuk, hogy a G gráf x pontját **szimmetrizáljuk** a vele össze nem kötött y ponthoz, ha elhagyjuk az x–ből induló éleket és x–et pontosan azokkal az egyéb csúcsokkal kötjük össze, amelyekkel y is van.

47. Mutasd meg, hogy ha G–ben nem volt teljes k–szög, akkor a szimmetrizálás után se lesz!

48. Szimmetrizáld egy maximális fokú ponthoz a vele össze nem kötötteket! Bizonyítsd be, hogy
    a) minden szimmetrizált pont össze lesz kötve minden nem szimmetrizálttal;
    b) ha az eredeti gráfban nem volt K_k, akkor a nem szimmetrizáltak által meghatározott részgráfban nem lesz K_{k-1}!

49. (folytatás) Bizonyítsd be ebből Turán tételét! •

50. (folytatás) Keress indukciós bizonyítást is Turán tételére! •

Távolságok a síkban

51. Igazold, hogy ha egy háromszög nem hegyesszögű, akkor leghosszabb oldala a legrövidebbnek legalább $\sqrt{2}$–szerese! →

52. Legyen adva a sík négy pontja. Mutasd meg, hogy
    (a) ha nincs három egy egyenesen, akkor van három, amelyek nem hegyesszögű háromszöget határoznak meg.
    (b) ha köztük a legnagyobb távolság D, akkor van kettő, amelyek távolsága $\leq D/\sqrt{2}$. •

53. Tegyük fel, hogy a sík n pontja között a legnagyobb távolság D. Mutasd meg, hogy
    a) ha van a pontok között olyan, amelyiktől legalább három másik van D távolságra, akkor olyan is kell legyen, amelyik csak egy másiktól van D–re!
    b) a D hosszúságú szakaszok száma $\leq n$. •

54. Bizonyítd be, hogy ha a sík tetszőleges n pontja között a legnagyobb távolság D, akkor legfeljebb $\lfloor n^2/3 \rfloor$ db. olyan pontpár van, amelyek távolsága $D/\sqrt{2}$–nél nagyobb. •

55. Mutassunk példát (először kis n–ekre, de aztán nagy n–ek esetén is) arra, hogy valóban lehet $\lfloor n^2/3 \rfloor$ ilyen pontpár. (Sőt még a $0,999D$–nél távolabbiakból is lehet ennyi!) •

* 56. Bizonyítsd be, hogy a sík n pontja között ugyanaz a távolság legfeljebb $c \cdot n^{3/2}$–szer fordulhat elő! •

57. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ olyan síkbeli vektorok, melyek mindegyikére $|v_i| \geq 1$. Legalább hány i, j párra lesz $|v_i + v_j| \geq 1$? →

Általánosított Turán–számok

DEF. A G gráf **Turán–számának** nevezzük és $t_G(n)$–nel jelöljük azt a maximális élszámot, ahány éle egy n pontú gráfnak lehet, ha nem tartalmazza az adott G-t. (Ezzel a jelöléssel Turán tétele azt mondja, hogy $t_{K_r}(n) = T_{r-1}(n)$.)

58. Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú gráfnak, ha nincs benne
   a) kör
   b) páratlan kör? →

59. Hány éle lehet egy nem összefüggő, n pontú gráfnak?

60. Hány éle lehet egy n pontú gráfnak, ha nincs benne
   a) két élű út
   b) három élű út? →

61. Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú gráfnak, ha nincs benne k élű csillag? →

62. Hány éle lehet egy n pontú gráfnak, ha nincs benne négy pontú kör? →

63. Mutasd meg, hogy páros gráf Turán–száma $o(n^2)$, pontosabban, ha mindkét osztályban legfeljebb k pont van, akkor $t_G(n) \leq n^{2-1/k} + \frac{k-1}{2} n$ →

64. (folytatás) Igazold, hogy ha G *nem* páros, akkor Turán–száma nem lehet $o(n^2)$! →

5.3. Minimax tételek

Minimax tételeknek az olyan állításokat nevezzük, amelyek két mennyiségről azt állítják, hogy az egyik lehetséges értékeinek maximuma egyenlő a másik lehetséges értékeinek minimumával. Ilyen pl. a 2.7. szakaszban szereplő Kőnig–tétel (2.144. feladat).

Intervallum–rendszerek

65. Egy nap sokan megfordultak egy tenisz–telepen, de minden játékos csak egyszer. Ha mindenki mindenkivel találkozott, igaz–e, hogy valamikor mindnyájan egyszerre ott voltak? (ez még nem minimax tétel)
66. (folytatás) Legyenek $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$ *zárt* intervallumok a számegyenesen.
    (a) Bizonyítsd be, hogy ha bármely kettőnek van közös pontja, akkor van olyan pont is, ami mindegyikben benne van.
    (b) Adj módszert (írj programot) ami keres ilyen pontot, ha van; ellenkező esetben pedig mutat két diszjunkt (azaz közös pont nélküli) intervallumot.

    Megjegyzés: a feladat (a) része sem triviális! Jó megoldásból a (b) alatti eljárás is kijön.
67. Egy folyón egy hajózási vállalat sok teherhajója jár, mindegyik mindig adott kikötők között oda–vissza. Szeretnék a hajókat ellenőrizni, valóban elvégzik–e hetente az előírt számú fordulót. Nem szükséges a sok kis kikötő mindegyikébe külön egy–egy ellenőrt küldeniük, mert az egyes folyó–szakaszokon általában több hajójuk is jár. A parton terveznek ellenőrző pontokat felállítani úgy, hogy minden hajó (állandó, kijelölt útja során) mindig legalább egy előtt elhaladjon. Adj módszert a minimális számú ellenőrző pont megkeresésére!
68. (folytatás)
    (a) adj módszert, ami tetszőleges (a kettővel korábbi feladat feltételét esetleg nem teljesítő) intervallumrendszert a lehető legkevesebb olyan csoportba oszt, hogy egy csoporton belül már az intervallumoknak van közös pontjuk.
    (b) Mutasd meg, hogy az ilyen csoportok száma nem lehet kisebb, mint a páronként diszjunkt (azaz közös pont nélküli) intervallumok maximális száma.
    (c) Bizonyítsd be, hogy a (b) alatti két mennyiség egyenlő! (Ez már minimax tétel!)
69. Adj módszert, ami tetszőleges intervallumrendszerhez kikeres egy pontot, ami a lehető legtöbb intervallumban van benne.
70. Adj módszert, ami tetszőleges intervallumokat a lehető legkevesebb olyan csoportba oszt, amiken belül az intervallumok diszjunktak.
71. Mutasd meg, hogy az előző két feladatban szereplő maximum ill. minimum ugyanaz.
72. Igazold, hogy tetszőleges intervallum–rendszer szakaszait ki lehet húzni piros és kék tollal úgy, hogy az egyenes minden egyes pontja „lényegében ugyanannyi” piros ill. kék szakaszban legyen benne. (Itt a „lényegében ugyanannyi” úgy értendő, hogy bármely pontban a rá illeszkedő pirosak ill. kékek száma közti eltérés nem több egynél. Ezek a mennyiségek különböző pontokban nagyon különbözőek lehetnek.)

* 73. (folytatás) Mutasd meg, hogy minden $k \geq 2$–re létezik ilyen egyenletes színezés!

74. Legyen adva $[0,1)$–ben az $[a_1,b_1),[a_2,b_2),\ldots,[a_n,b_n)$ intervallumok rendszere, melyek egyesítése az egész $[0,1)$. (Minden intervallum balról zárt, jobbról nyílt!)
   a) Adj módszert, ami kiválasztja a lehető legkevesebb $[a_i,b_i)$–t, amelyek lefedik a teljes $[0,1)$–et!
   b) Adj módszert, ami megkeresi a lehető legtöbb olyan pontot $[0,1)$–ben, melyek közül semelyik kettő sem esik együtt egy intervallumba!
   c) Mi köze egymáshoz az a) ill. b) részeknek?

* 75. Három házaspár mind a hat tagja külön–külön meglátogat egy (hetedik) beteget. Mind a három férj találkozik két feleséggel. Mutasd meg, hogy valamelyik férjnek találkoznia kellett a saját feleségével is.

Többszörösen összefüggő gráfok. Menger tételei.

DEF. Az összefüggő G gráf
k–**szorosan élösszefüggő**, semelyik k él elhagyása sem vágja szét;
k–**szorosan pontösszefüggő**, ha $|V| \geq k+1$ és semelyik k pont elhagyása sem vágja szét. (A pontszámra vonatkozó feltétel, mint a 2–összefüggőségnél, K_k–t zárja ki.)

76. Bizonyítsd be, hogy k–szorosan pontösszefüggő gráf k–szorosan élösszefüggő is.

77. k–szorosan pontösszefüggő gráfhoz egy új csúcsot hozzávéve és azt legalább k régivel összekötve újra k–szorosan pontösszefüggő gráfot kapunk.

78. Legyen $|V(G)| \geq 2$. Ha bármaly $x,y \in V(G)$ (különböző) csúcspár között
   (a) legalább k élidegen út létezik, akkor a G gráf k–szorosan élösszefüggő;
   (b) legalább k közös belső pont nélküli út létezik, akkor a G gráf k–szorosan pontösszefüggő.

DEF. Legyen adva egy gráfban t darab élidegen $x-y$ út: $P_1,P_2,\ldots,P_t$. Egy x–ből induló P_0 út **javító út**, ha a P_i $(i \geq 1)$ utak éleit nem használja az $x \to y$ természetes irányban, legfeljebb fordítva.

79. Tegyük fel, hogy x–ből eljuthatunk y–ba javító úton. Bizonyítsd be, hogy létezik $t+1$ darab élidegen $x-y$ út is. →

80. Tegyük fel, hogy $P_1,P_2,\ldots,P_t$ maximális számú élidegen $x-y$ út. Bizonyítsd be, hogy egy-egy alkalmas élüket törölve megszűnik az x és y pontok közötti összeköttetés. →

ÉL–MENGER TÉTEL. *Tetszőleges (irányítatlan) gráfban*

élidegen x–y utak maximális száma =
x-et y-tól elvágó élek minimális száma.

DEF. Legyen adva egy gráfban t darab közös belső pont nélküli $x-y$ út: $P_1, P_2, \ldots, P_t$. Egy x–ből induló S séta **javító séta**, ha

(1) x–ból indul, de nem a P_i–k valamelyik élén;

(2) él nem ismétlődhet;

(3) **csúcs ismétlődhet, de ...**

(4) ... ha egy P_i–re lépünk, akkor azon kötelező legalább egy lépést vissza (x felé) menni.

Megjegyzés: (3)–ból és (4)–ből következik, hogy a P_i–ken levő egy-egy csúcsot legfeljebb kétszer érinthetünk [legfeljebb egyszer léphetünk bele a P_i–n utána következő pontból és ugyancsak legfeljebb egyszer léphetünk rá külső pontból — itt használjuk (3)–at és (4)–et].

81. Tegyük fel, hogy x–ből létezik y–ba javító séta. Bizonyítsd be, hogy létezik $t+1$ darab közös belső pont nélküli $x-y$ út is. →

Megjegyzés: Ha a gráf a $P_1 = x-a-b-c-y$ útból és az (xb), (by), (ac) élekből áll, akkor javító ÚTON nem érhető el y, de létezik $S = x-b-a-c-b-y$ javító séta; van is két független út.

82. Tegyük fel, hogy nincs a gráfban $x-y$ él és legyen $P_1, P_2, \ldots, P_t$ maximális számú közös belső pont nélküli $x-y$ út. Bizonyítsd be, hogy egy-egy alkalmas pontjukat törölve megszűnik az x és y pontok közötti összeköttetés. →

PONT–MENGER TÉTEL. *Ha egy (irányítatlan) gráfban nem létezik (x, y) él, akkor*

közös belső pont nélküli x–y utak maximális száma =
x-et y-tól elvágó csúcsok minimális száma.

83. Egy k–szorosan pontösszefüggő gráfban kijelölt valaki legfeljebb k darab A_i csúcsot és legfeljebb k darab B_j csúcsot. Legaláb hány közös belső pont nélküli A_iB_j út létezik?

* 84. Mutasd meg, hogy k–szorosan pontösszefüggő gráfban bármely k darab csúcs egy körön van!

Részben rendezett halmazok

DEF. Azt modjuk, hogy $\langle H, \prec \rangle$ **részben rendezett halmaz** (a $\prec$ relációval), ha

(i) $\prec$ irrreflexív, azaz $\forall x \in H$–ra $x \not\prec x$;

(ii) $\prec$ tranzitív, azaz $x \prec y$ és $y \prec z$ esetén $x \prec z$.

Például tetszőleges halmazrendszer ilyen a „$\subset$” tartalmazási relációra nézve, vagy természetes számok bármely részhalmaza az oszthatósági relációra nézve. Persze minden (teljesen) rendezett halmaz is ilyen.

85. Mutasd meg, hogy $\prec$ antiszimmetrikus is, azaz $x \prec y$ és $y \prec x$, egyszerre nem teljesülhet.

86. Definiáljuk a következő részbenrendezést az intervallumokon: $[a, b]$ megelőzi $[c, d]$-t, ha $b < c$. Igaz-e, hogy bármely részben rendezett halmaz reprezentálható így? •

Szokás szerint akkor nevezünk „maximálisnak” egy halmazt, ha nem bővíthető; ez nem jelenti azt, hogy nála több elemű sincs. Részben rendezett halmazok körében pedig egy elem akkor maximális, ha nincs nála nagyobb ($\succ$ szerint); ez nem jelenti azt, hogy minden másnál nagyobb.

87. Létezik-e olyan részben rendezett halmaz, amelyben minden elem maximális?

DEF. Egy részben rendezett halmaz egy részhalmaza **lánc,** ha bármely két eleme összehasonlított. **Antilánc,** ha semelyik két eleme sem összehasonlított.

88. Részben rendezett halmaz maximális elemei antiláncot alkotnak.

89. (folytatás)
   (a) Mutass példát arra, hogy ezek a maximális elemek nem feltétlenül alkotnak *maximális méretű* antiláncot.
   (b) Mi a helyzet, ha feltesszük, hogy minden elem benne van egy maximális méretű antiláncban?

90. (ÜTEMEZÉSI PROBLÉMA) Egy részben rendezett halmaz elemei reprezentálják egy–egy napi teendőket, a $\prec$ reláció pedig azt, hogy egyiket a másik után lehet csak elvégezni. Tegyük fel, hogy korlátlan számú munkás áll rendelkezésünkre. Bizonyítsd be, hogy

   az összes feladat elvégzéséhez szükséges idő =
   = a legnagyobb lánc mérete.

91. DILWORTH TÉTELE:

   láncokra bontáshoz szükséges láncok min. száma =
   = a legnagyobb antilánc mérete.

92. Ha egy részben rendezett halmaz bármely két maximális méretű antiláncának van közös eleme, akkor az összesnek is van.

93. Igaz-e, hogy részben rendezett halmazokban

   páronként diszjunkt legnagyobb antiláncok max. száma =
   az összes legnagyobb antiláncot lefogó elemek min. száma?

5.4. A Prüfer–kód.

CAYLEY TÉTELE: Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ pontokon n^{n-2} fa adható meg.
Megjegyzés: 1. E tételben különbözőnek számoljuk az egymással izomorf fákat is, pl. három ponton az 1-2-3 utat és az 1-3-2 utat.
Megjegyzés: 2. Cayley tételére sok bizonyítás ismeretes. Sokáig nem találtak azonban olyant, ami közvetlen megfeleltetést ad az n (számozott) pontú fák és

az $1, 2, \ldots, n$ számokból képezhető $n-2$ tagú sorozatok között. Végül Prüfer járt sikerrel; az ő eredményét találod az alábbiakban:
Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ pontokon adott T_1 fához rendeljünk $n-2$ tagú sorozatot a következőképpen: Hagyjuk el a fa elsőfokú pontjai közül a legkisebb indexűt, és *szomszédja* (a vele összekötött egyetlen pont) indexét jegyezzük fel; legyen ez a_1. Ismételjük az eljárást a maradék T_2 részfára (így további a_i pontokat és T_i részfákat kapunk), amíg csak két pont marad. Akkor álljunk le.

DEF. A fenti sorozat a fa **Prüfer–kódja.**

94. Mutasd meg, hogy az eljárás befejezésekor megmaradó két pont egyike az n indexű. →

95. A Prüfer–kódban az i szám éppen $d_i - 1$–szer fordul elő, ahol d_i az i pont foka. •

* 96. Mutasd meg, hogy minden kódhoz *pontosan egy* fa tartozik!

97. Bizonyítsd be Cayley tételét!

98. Legyen $1 \le d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n \le n$ olyan sorozat, melyre $\sum d_i = 2(n-1)$. Mutasd meg, hogy létezik n pontú fa ilyen fokszámokkal! →

99. (folytatás) Hány ilyen fa van az $1, 2, \ldots, n$ pontokon? •

6. fejezet

Algoritmusok II. (Gráf algoritmusok)

Hogyan tároljunk gráfokat számítógépben?

DEF. Gráf tárolása tömbben (szokásos az **„összekötöttségi mátrix" elnevezés**).
n pontú gráfhoz $n \times n$–es kétdimenziós tömböt használhatunk, melyben

$$\mathbf{A}[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{, ha az } i\text{–edik és } j\text{–edik pont között van él;} \\ 0 & \text{, ha nincs.} \end{cases}$$

Előnye: a közvetlenül elérhető $\mathbf{A}[i,j]$ elem azonnal adja az információt az (i,j) pontpárról.
Hátránya: „ritka" gráf (sok pont, de nem nagyon sok él) esetén a tömb túlnyomó többségben 0–kat tartalmaz — nem ideálisan használja ki a helyet.

Megjegyzés: Érdemes megemlíteni azt az előnyt is, hogy ha a tömb elemeiben az élekre vonatkozó további információt is tárolunk (pl. a menetidőt adott pontok között, amik pályaudvarokat reprezentálnak), akkor „mellékhatásként" maguk az eredeti 0–1–ek feleslegessé válnak. Megtehetjük például, hogy pozitív szám valódi adatot, negatív szám pedig nem létező élet jelent. Még logikusabb az elfajuló esetek kezelése az $\mathbf{A}[i,j] = \infty$, ha nincs él („ítéletnapig is várhatsz; nincs vonat") és $\mathbf{A}[i,i] = 0$ („i–ből önmagába: nulla idő") jelölések használata.

DEF. Gráf tárolása él–listákkal.
Minden ponthoz külön–külön listában tartjuk a rá illeszkedő élek másik végpontjának sorszámát. Kell persze (egy tömbben) minden ponthoz egy-egy mutató a belőle induló élek listájának elejére — és néha célszerű a végére is.
Előnye: csak annyi élről kell információt tárolnunk, amennyi ténylegesen van a gráfban.
Hátránya: nem tudjuk közvetlenül eldönteni, két adott pont között vezet-e él; ehhez egyikük él–listáját kell végigvizsgálnunk.

Megjegyzés: Mindkét változat alkalmas *irányított* gráfok tárolására is.

1. Adott n csúcsú, e élű irányított gráfhoz készítsd el az élek megfordításával keletkező gráf él-listáit $O(n+e)$ időben!

* 2. Rendezd adott n csúcsú, e élű gráf él-listáit a másik végpontok szerint $O(n+e)$ időben!

6.1. Összefüggőségi algoritmusok

Szélességi és mélységi keresés

3. Hány lépésben tudod megkeresni egy n pontú, e élű gráf összefüggő komponenseit, ha a gráfot tömbben tároljuk?
4. (folytatás) És ha él–listákkal?

* 5. Mutasd meg, hogy tömbben tárolt gráf esetén MINDEN algoritmus rákényszeríthető— elég „rosszindulatú" gráfon —, hogy MINDEN pontpár összekötöttségére rákérdezzen (azaz kiolvassa a tömbből).

DEF. **Szélességi keresés**: ha minden, már elért pontból minden, onnan elérhetőt megkeresünk. **Szélességi keresőfa**: az újonnan elért csúcsokba érkező élek.

DEF. **Mélységi keresés**: ha ha minden, már elért pontból mindig csak egyetlen újat keresünk és arra haladunk tovább. **Mélységi keresőfa**: az újonnan elért csúcsokba érkező élek.

6. A szélességi keresés szintjei a kezdőponttól való távolságnak felelnek meg.
7. Valósítsd meg a szélességi keresést (megfelelő tömbökkel és listákkal) $O(n+e)$ időben!
8. Hogyan keresnél legrövidebb útat két adott csúcs között?
9. Egy mélységi keresőfában nem szereplő élek csak a fa azonos ágára eső csúcsokat köthetnek össze.
10. Valósítsd meg a mélységi keresést (megfelelő tömbökkel és listákkal) $O(n+e)$ időben!
11. Adj algoritmust kétszeres összefüggőség vizsgálatára, mely összefüggő gráf esetén élszámnyi időben működik.
12. Mutassunk polinomiális algoritmust a következő feladatra:
    Adott: G irányítatlan gráf és három csúcsa: x, y, z.
    Eldöntendő: létezik-e út x-ből y-on át z-be?
13. Mutassunk polinomiális algoritmust a következő feladatra:
    Adott: G irányítatlan gráf és négy csúcsa: x_1, x_2, y_1, y_2.
    Eldöntendő: létezik-e két, teljesen közös csúcs nélküli x_i — y_j út? (Tehát x_1—y_1 és x_2—y_2 jó, x_1—y_2 és x_2—y_1 is jó, de x_1—y_1 és x_2—y_1 nem.)
14. Adj élszámnyi idejű algoritmust irányított gráf erős összefüggőségének eldöntésére.

* 15. Keress kétszeresen összefüggő komponeneseket lineáris időben.

** 16. Keresd meg egy irányított gráf erősen összefüggő komponenseit lineáris időben.

* 17. Keresd meg egy kétszeresen összefüggő gráf
(a) fül–felbontását;
(b) s–t számozását.

A max–vissza sorrend

Ebben a részben kivételesen *többszörös éleket* tartalmazó gráfokat is megengedünk. Ilyenkor e a *multiplicitással számolt* élszámot jelöli.

DEF. Egy G gráf V csúcshalmazának **max–vissza sorrendje** $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ha bármely $i > 0$–ra az x_i csúcsból legalább annyi él vezet az $\{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\}$ halmazba, mint bármely későbbiből ugyanide.

18. (NAGAMOCHI–IBARAKI LEMMA): Ha $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ egy esetleg többszörös élű gráf egy max–vissza sorrendje, akkor x_{n-1} és x_n szétvágásához legalább annyi élet kell elhagyni, mint x_n foka. •

19. (folytatás) (MADER TÉTELE) Tetszőleges irányítatlan gráfban található olyan x, y pontpár, melyek között az élidegen utak maximális száma éppen y foka. →

* 20. Keress max–vissza sorrendet $O(e)$ időben. →

** 21. Keress algoritmust k–szoros összefüggőség vizsgálatára $O(ne)$ időben.

6.2. A Dijkstra–algoritmus.

DEF. **Súlyozott élű** irányított gráf: minden (x, y) élhez adott egy–egy $w(x, y) \geq 0$ szám. (Ezeket a továbbiakban „súly”–nak vagy „költség”–nek, esetleg „hossz”–nak fogjuk nevezni.)

MINIMÁLIS ÖSSZSÚLYÚ ÚT PROBLMÁJA:
Adott: n pontú, m élű $G(V, E)$ irányított gráf $w : E \mapsto \mathbf{R}^+$ súlyozással, továbbá
a) két kijelölt pont, p és q;
b) egy kijelölt p pont;
c) nincs kijelölt pont.

Keresendő
a) esetben: minimális összsúlyú út p–ből q–ba;
b) esetben: minimális összsúlyú út p–ből az összes többi pontba;
c) esetben: minimális összsúlyú út az összes pontpár között.

Megjegyzés: Már a legegyszerűbbnek tűnő a) esetben is $(n-2)!$ különböző út jöhet szóba. Ezek száma már 20–30 pontú gráfban is irreálisan nagy; a leggyorsabb számítógépekkel sem kezelhető. Intelligensebb módszert kell kitalálni.

Nem ismeretes olyan eljárás, ami az a) esetet úgy oldaná meg, hogy közben ne adódna ki *minden* $q \neq p$–re a minimum, vagyis mellékesen ne a teljes b) esetet oldaná meg. Ezért rögtön az utóbbival kezdjük az elemzést.

22. Jelöljük a b) esetben minden $x \in V$–re a keresett minimumot $W(x)$–szel! Nyilvánvaló, hogy $W(p) = 0$. Tudsz-e találni *egyetlen* $q \neq p$ pontot, amire $W(q)$ gyorsan meghatározható? $\rightarrow$

23. Tegyük fel, hogy egy kismadár már elcsicseregte, hogy a $p = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ pontokra mennyi a keresett $W(x_i)$.
    a) Hogyan keresnél olyan $x_k \in V$ pontot, amire könnyen megállapítható $W(x_k)$? $\bullet$
    b) Hány összehasonlítás kell x_k kiválasztásához?

24. (folytatás) Tedd fel még, hogy minden $x \in V$–re megsúgott a kismadár egy–egy $\textsc{Wspec}(x)$ értéket is, ami a p–ből x–be vezető legolcsóbb olyan speciális út összsúlyát jelenti, aminek csak az x végpontja nincs a fenti x_i–k között. Hány összehasonlítás kell x_k–nak és az *összes* új $\textsc{Wspec}(x)$ értéknek a meghatározásához? $\bullet$

DIJKSTRA–ALGORITMUS:
Adott: n pontú, m élű $G(V,E)$ irányított gráf $w : E \mapsto \mathbf{R}^+$ súlyozással, továbbá egy kijelölt p pont.
Keresendő: minimális összsúlyú út p–ből az összes többi pontba.

Az előző feladat **Wspec**(x) változóit fogjuk használni, továbbá egy **ÚjPont** változót, ami az aktuális x_k–t tartalmazza. Az elintézett x_i–ket a **KészPontok** halmaz tartalmazza.
Inicializálás:
  minden **Wspec**$(x) := W(x) := \infty$, kivéve **Wspec**$(p) := W(p) := 0$.
  ÚjPont$:= p$, **KészPontok**$:= \{p\}$.
Ciklus $n-1$–szer:
(i) Minden (**ÚjPont**$, x) \in E$, $x \notin$ **KészPontok**–ra
  Wspec$(x) := \min\{$**Wspec**$(x); W($**ÚjPont**$) + w($**ÚjPont**$, x)\}$.
(ii) **ÚjPont**:= az az $x \notin$ **KészPontok**, amire **Wspec**(x) minimális.
(iii) **KészPontok** := **KészPontok** $\cup$ {**ÚjPont**}
(iv) $W($**ÚjPont**$) :=$ **Wspec**(**ÚjPont**)

Megjegyzés: A $\textsc{Wspec}$ és W változók közül egy is elég lenne, pl. W–ben végül úgyis $W\mathit{spec}$ jelenik meg. Csak a könnyebb érthetőség kedvéért használtuk mindkettőt.

Lépésszám: Az (i) rész $d^-($**ÚjPont**$)$ lépés. A teljes eljárás során ez *összesen* legfeljebb m összehasonlítás.
A (ii) rész összesen $(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = \binom{n}{2}$ összehasonlítást jelent (lásd 24. feladat).
A többi együtt $O(n)$ lépés.
Eszerint a teljes lépésszám $O(m+n^2)$.

25. Adj eljárást arra, hogyan keresnéd meg súlyozott élű irányított gráfban adott pontból az összes többihez nemcsak a minimális odavezető út összsúlyát, hanem magukat az utakat is. →

* 26. Ritka gráfokon (ahol $m << \binom{n}{2}$) a minimumok kiválasztásához szükséges n^2 adja a lépésszám nagyját. Javítsd az algoritmust úgy, hogy $O\big((n+m)\log n\big)$ lépésben működjön! →

6.3. Minimális költségű feszítő fák

DEF. Ha a $G(V,E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf élein adott egy $w : E \to \mathbf{R}^+$ *súlyfüggvény* (vagy *költségfüggvény* vagy egyszerűen *hosszúság*), akkor **súlyozott élű** gráfnak nevezzük. Néha megengedjük, hogy w negatív értékeket is felvegyen; ezek az esetek általában bonyolultabbak.

MINIMÁLIS FESZÍTŐ FA PROBLÉMÁJA:

Adott: Súlyozott élű irányítatlan, összefüggő gráf.

Keresendő: Olyan F feszítő fa, melynek összsúlya (tehát $\sum_{e\in F} w(e)$) a lehető legkisebb.

A probléma megoldásához bevezetésként néhány észrevételre lesz szükségünk:

27. Ha F tetszőleges fa, e pedig egy olyan él, amely F két pontját köti össze, akkor található $f \in F$ él, melyre $(F \setminus f) \cup e$ is fa lesz. (Azaz f kicserélhető e–re.) →

28. Ha F_1 és F_2 két fa ugyanazon a csúcshalmazon, $f_1 \in F_1$ tetszőleges él, akkor található $f_2 \in F_2$ él, melyre $(F_1 \setminus f_1) \cup f_2$ is fa lesz. →

29. (folytatás) Igaz-e, hogy az előző feladat jelöléseivel olyan f_2 él is létezik, melyre nemcsak $(F_1 \setminus f_1) \cup f_2$, de $(F_2 \setminus f_2) \cup f_1$ is fa lesz? →

Mohó algoritmusok

DEF. **„Mohó algoritmus"** néven azokat az eljárásokat szokás emlegetni, amelyek úgy rakják össze a keresett struktúrát, hogy mindig a *pillanatnyilag legkedvezőbb* részeket választják ki, és később ezeket nem módosítják. A fenti problémára egy ilyen megoldás lehetne például a következő:

MOHÓ ALGORITMUS MINIMÁLIS FESZÍTŐ FA KERESÉSÉRE (KRUSKAL):

Rendezzük sorba súly szerint növekvőleg a gráf éleit: $w(e_1) \le w(e_2) \le \ldots \le w(e_m)$ és menjünk végig rajtuk. Feltétlenül vegyük be a fába e_1–et és e_2–t; a többiből pedig pontosan azokat, amelyek az addig beválasztottakkal együtt nem tartalmaznak kört.

30. Mutasd meg, hogy ez az eljárás mindig feszítő fát ad! (Hogy mennyire kis összsúlyút, arra még visszatérünk.) →
Megjegyzés: A mohóság ritkán vezet jóra! Néhány példa:

31. Mutass példát négy pontú, súlyozott élű gráfra, amelyben a legolcsóbb *négy élű kör* keresésekor a mohó eljárás (tehát mindig a lehető legkisebb súlyú él választása) a minimálisnál sokkal (pl. százszor) rosszabbat ad!

32. Most súlyozott *pontú* gráfban keressük a lehető legnagyobb összsúlyú ponthalmazt, melyek között nem vezet egyetlen él sem. Mutass olyan példát, ahol a mohó módszerrel (mindig a lehető legnagyobb súlyú pont választásával) a maximumnak csak töredékét (pl. századrészét) kaphatjuk!

33. Ismét súlyozott élű gráfban keressük a lehető legnagyobb összsúlyú élhalmazt, melyeknek nincs közös végpontjuk. Mutass olyan példát, ahol a mohó módszer a maximumnak kb. felét adja!

34. (folytatás) Bizonyítsd be, hogy az utolsó feladatban ennél rosszabb eset nem lehetséges; a maximum legalább felét mohón is mindig megkapjuk! →
Megjegyzés: A fenti példák alapján lesz igazán meglepő a következő két feladat állítása:

35. Legyen a Kruskal–algoritmussal választott fa K, egy minimális összsúlyú pedig M ! Jelöljük K éleit a választás sorrendjében $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$–gyel; M éleit pedig (ugyancsak súly szerint növekvőleg) $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$–gyel. Tegyük fel, hogy $k_i = m_i$, ha $i < r$, de $k_r \neq m_r$ (azaz a két fa első $r-1$ éle azonos, de az r–edik már nem.) Mutasd meg, hogy létezik másik, M' minimális feszítő fa, amelynek első r darab éle mind közös K–val! →

36. (folytatás) Bizonyítsd be, hogy a Kruskal–féle mohó fa mindig minimális feszítő fa! →

A Kruskal–algoritmus néhány változata.

37. KRUSKAL „ÓVATOS" ALGORITMUSA:
Rendezzük *csökkenőleg* az élsúlyokat: $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \ldots \geq w(e_m)$. Végigmenve rajtuk válasszunk ki bizonyos e_{i_k} éleket a következő szabály szerint: ha $j < k$–ra e_{i_j} már megvan, akkor e_{i_k} legyen az első olyan e_r, melyre $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots$, $e_{i_k-1}, e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots$ már nem lenne összefüggő. (Más szóval az a filozófia, hogy csak akkor veszünk be egy élet, ha mindenképpen szükséges.) Bizonyítsd be, hogy így is minimális feszítő fához jutunk! →

38. Mutass példát arra, amikor a 31. feladatra az „óvatos" algoritmus a minimumnak kb. kétszeresét adja!
Megjegyzés: Nagyobb méretű gráfon bármennyire (akár százszor) rosszabbat is kaphatunk.

39. Legyen adva a síkban n pont azzal a megkötéssel, hogy a közöttük fellépő $\binom{n}{2}$ távolság mind különböző. Húzzunk egyenes szakaszt minden pontból a hozzá legközelebb esőhöz! (Egy szakaszt kétszer is behúzhatunk.) Mutasd meg, hogy így nem keletkezhet zárt sokszögvonal! →

40. Válasszuk ki egy súlyozott élű irányítatlan gráf (ponthalmaza $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$) minden egyes pontjához a belőle induló élek közül a minimális súlyút; ha több ilyen van, akkor ezek közül azt, amelynek másik végpontja a lehető legkisebb indexű. Bizonyítsd be, hogy a kiválasztott élek erdőt alkotnak (azaz nem lehet köztük kör)! $\rightarrow$

41. (folytatás) (Borůvka mohó algoritmusa:) Tegyük fel, hogy a fenti élek kiválasztása után a keletkező erdő komponenseit egy–egy ponttá vonjuk össze (megszüntetve az egy komponensen belüli éleket, és meghagyva az új pontpárok között a két régi komponens között menő élek közül a legolcsóbbat). A keletkező gráfra kezdjük elölről az eljárást. Bizonyítsd be, hogy
   a) legfeljebb $\log_2 n$ ismétlés után egyetlen pontból álló gráfhoz jutunk;
   b) az eljárás során kiválasztott élek fát alkotnak az eredeti gráfban;
   c) ez a fa minimális feszítő fa! $\bullet$

   Megjegyzés: Egyre több olyan számítógépet építenek, amelyekben több (gyakran sok ezer) processzor egyszerre végzi a számításokat. (Magyarországon sajnos még csak mutatóban van egy–kettő.) A fenti algoritmus ilyen gépekre kiválóan alkalmas.

7. fejezet

Halmazrendszerek.

1. Egy ulti-versenyen tízen indultak. Mindig három játékos ül egy asztalnál és egy partit játszanak; aztán új hármas következik. Az első szünetben valaki megkérdezte tőlük, ki hány játszmát játszott. A válaszok: 4 4 3 3 2 3 4 3 2 4. Kilencen jól emlékeztek, egy rosszul — de ő is csak egyet tévedett. Többet vagy kevesebbet mondott?

   Szokás szerint $|X|$ az X halmaz elemszámát jelöli a továbbiakban.
   Legyen $H_1, H_2, \dots, H_m$ az $\{1, 2, \dots, n\}$ alaphalmaz részhalmazainak tetszőleges rendszere.

DEF. Az i elem **foka** (jelölése d_i): ahány H_j–ben i benne van.

2. Mutasd meg hogy,
$$\sum_{i \le n} d_i = \sum_{j \le m} |H_j|$$

3. (folytatás) Bizonyítsd be az előző állítást abból is, hogy egy $(a_{i,j})$ mátrixra
$$\sum_i \sum_j a_{i,j} = \sum_j \sum_i a_{i,j},$$
   azaz a sorösszegek összege és az oszlopösszegek összege azonos.

4. Tegyük fel, hogy minden $|H_j \cap H_k| \le 1$, ha $j \ne k$. Bizonyítsd be, hogy
$$a) \qquad \sum \binom{d_i}{2} \le \binom{m}{2};$$
$$b) \qquad \sum \binom{|H_i|}{2} \le \binom{n}{2}.$$

5. Legyen $|H| = n$ és $A_1, A_2, \dots, A_n \subset H$ (nem sajtóhiba: $m = n$) csupa különböző részhalmazok. Bizonyítandó: létezik $x \in H$, hogy $A_1 - \{x\}, A_2 - \{x\}, \dots$, $A_n - \{x\}$ is csupa különbözőek.

6. Legyenek $\{A_1, A_2, \dots, A_{\binom{n}{k}}\}$ egy n elemű halmaz összes k elemű részei; $k < n/2$. Mutasd meg, hogy kiválasztható $\binom{n}{k}$ darab különböző $k+1$ elemű B_i, hogy minden $1 \le i \le \binom{n}{k}$–ra $A_i \subset B_i$. •

7.1. Helly típusú tételek

A most ismertetendő tételkör egy Hellytől származó eredményről kapta nevét:

Helly tétele a síkban. *Ha a sík $K_1, K_2, \ldots, K_n$ konvex halmazai közül bármely háromnak van közös pontja, akkor az összesnek is van.*

7. Mutasd meg, hogy az állítás igaz $n = 4$–re! •
8. (folytatás) Bizonyítsd be Helly tételét! •

Helly tétele egyéb dimenziókban is kimondható. Közismert az egydimenziós változat:

9. Ha a számegyenes véges sok (pl. legyenek zártak, de más típusokra is igaz) intervalluma közül bármely kettő egymásba metsz, akkor van olyan pont, ami minden intervallumban benne van. →

Helly tétele d dimenzióban. *Ha $\mathbf{R}^d$ $K_1, K_2, \ldots, K_n$ konvex halmazai közül bármely $d+1$–nek van közös pontja, akkor az összesnek is van.*

10. Mutass az egyenesen (síkban, térben, $\mathbf{R}^d$–ben)
    a) korlátos, de nem zárt;
    b) zárt, de nem korlátos konvex halmazokból *végtelen sokat*, amelyek között bármely kettő (három, négy, $\ldots, d+1$) egymásba metsz, mégsincs az összesnek közös pontja. (Vagyis további feltételek nélkül végtelenre nem általánosítható a Helly–tétel!) →

Végtelen Helly–tétel d dimenzióban. *Ha $\mathbf{R}^d$ akárhány zárt korlátos konvex halmaza közül bármely $d+1$–nek van közös pontja, akkor az összesnek is van.*

(A bizonyítás egy analitikus segédtételből következik:

Ha $\mathbf{R}^d$ akárhány korlátos zárt halmaza közül bármely véges soknak van közös pontja, akkor az összesnek is van.

(Ez a Borel–féle fedési lemmával ekvivalens.)
Megjegyzés: Érdekes (és gyakran hasznos), hogy elég *egyetlen* halmazról megkövetelni a korlátosságot:

Erős végtelen Helly–tétel d dimenzióban. *Ha $\mathbf{R}^d$ akárhány zárt konvex halmaza közül bármely $d+1$–nek van közös pontja a korlátos zárt konvex H–ban, akkor az összesnek is van.*

11. Bizonyítsd be az erős végtelen változatot a véges tételből és az említett analitikus segédtételből!

12. Ha a sík véges sok pontja közül bármely három lefedhető egy r sugarú körlemezzel, akkor az összes is.
13. Tegyük fel, hogy egy síkbeli ponthalmazban nem fordul elő D–nél nagyobb távolság. Fedhető-e biztosan
    a) $r = D/2$ sugarú körrel;
    b) $r = D$ sugarú körrel? →
14. Ha egy H háromszög leghosszabb oldala a, akkor H befoglalható alkalmas középpontú $r = a/\sqrt{3}$ sugarú körbe! •

JUNG TÉTELE. *Ha egy síkbeli (véges vagy végtelen) ponthalmazban nincs D–nél nagyobb távolság, akkor a halmaz lefedhető $D/\sqrt{3}$ sugarú körrel.*

15. Bizonyítsd be Jung tételét véges halmazokra! →
16. (folytatás) Bizonyítsd be Jung tételét tetszőleges végtelen halmazokra is! →
17. Ha a sík véges sok pontja közül bármely három lefedhető egy adott K konvex halmaz valamelyik eltoltjával, akkor az összes is.

* 18. Bizonyítsd be, hogy a sík (tér, $\ldots, \mathbf{R}^d$) bármely korlátos konvex halmazának van olyan pontja, mely a rajta átmenő húrokat legfeljebb 2:1 (3:1, …, d:1) arányban osztja!

DEF. A sík (tér, $\mathbf{R}^d$) egy korlátos ponthalmazának **centruma** olyan pont, amelyen átmenő bármely egyenes (sík, hipersík) által levágott darabok (a *zárt* félsíkokba, félterekbe eső részek) mérete az eredetinek legalább $\frac{1}{3}$–a ($\frac{1}{4}$–e, …, $\frac{1}{d+1}$–ed része).
Megjegyzés: Csak korlátos halmazokkal foglalkozunk. Ezen belül két alap–eset érdekes:
(i) ha a halmazok véges sok pontból állnak; ekkor a részek mérete a darabszámuk;
(ii) ha területük pozitív; akkor ez a mérőszám.

TÉTEL. *Minden korlátos ponthalmaznak van centruma.*

19. Egy nyílt vagy zárt félsíkra (féltérre) mondjuk azt, hogy **rossz**, ha benne a halmaznak kevesebb, mint 1/3 (1/4, …, $1/(d+1)$–ed) része van. Mutasd meg, hogy egy pont akkor és csak akkor nem centrum, ha valamely rossz nyílt félsíkban (féltérben) van! →
20. (folytatás) Bizonyítsd be a fenti tételt! •

Lehet-e jobbat mondani *konvex* halmazokra? A szabályos háromszög súlypontján átmenő egyenesek példája azt mutatja, hogy nem várható jobb, mint az egész alakzat 4/9–ed része. Ez viszont mindig el is érhető:

TÉTEL. *Tetszőleges síkbeli korlátos konvex halmaz területét a súlypontján átmenő bármely egyenes 4:5 vagy egyenletesebb arányban osztja.*

* 21. Ha a sík bizonyos egységkörei közül bármely kettőnek van közös pontja, akkor lefoghatók három ponttal.

22. A sík bizonyos konvex halmazaiból bármely kettőnek van közös pontja. Igaz-e, hogy lefoghatók három ponttal?
23. Ha egy intervallumrendszer bármely $s+1$ tagja lefogható s ponttal, akkor az összes is.
24. Egy fa $T_1, T_2, \ldots, T_n$ részfái közül bármely kettőnek van közös csúcsa. Bizonyítandó: az összesnek is van.
    Igaz-e hasonló állítás csúcsok helyett élekre?
25. Ha egy részben rendezett halmaz bármely két maximális méretű antiláncának van közös eleme, akkor az összesnek is van.
26. Ha egy legfeljebb háromelemű halmazokból álló halmazrendszerben bármely legfeljebb négynek van közös eleme, akkor az összesnek is van. Mutass példát, hogy négy helyett nem elég hármat megkövetelni!
27. (folytatás) Ha egy legfeljebb r elemű halmazokból álló rendszerben bármely legfeljebb $r+1$–nek van közös eleme, akkor az összesnek is van. Mutass példát, hogy $r+1$ helyett nem elég r–et megkövetelni!
28. Ha egy fa néhány részfája közül bármely $s+1$ lefogható s ponttal, akkor az összes is.
29. $d \geq 2$ dimenziós konvex halmazokra nem igaz hasonló: már $\mathbf{R}^2$–ben is megadható (bármely páratlan s–re) s darab konvex halmaz, melyek közül bármely $s-1$ lefogható két ponttal, de az összes nem.

7.2. Ramsey tételei halmazrendszerekre.

Ebben a szakaszban halmazrendszerek színezéseivel foglalkozunk. Mindig egy (véges vagy végtelen) alaphamaz r elemű részeit színezzük, valamilyen r természetes számra. VIGYÁZAT!! Ez pl. $r=3$ esetén azt jelenti, hogy sem a pontok (elemek), sem a párok (élek), sem a 3–nál több elemű részek nem kapnak színt — csak a hármasok. Úgy is képzelhetjük, hogy kis cédulákra írjuk a 3 elemű részhalmazokat, egy-egy cédulára egyet-egyet, és a cédulák lehetnek pirosak, kékek, esetleg más színűek is. Másképp, ha az alaphalmaz elemei a három dimenziós tér pontjai, akkor az összes ponthármasra egy-egy színes papírból kivágott háromszöget erősítünk (n pont esetén $\binom{n}{3}$–at). Persze $r>3$ esetén ez utóbbi szemléltetés nem működik.

30. Tegyük fel, hogy egy H_0 végtelen alaphamaz összes 3 elemű részhalmazait kiszíneztük pirosra vagy kékre. Vegyünk ki egy $x_0 \in H_0$ elemet. Biztosan létezik-e $H_1 \subset H_0 - \{x_0\}$ *végtelen* részhalmaz, melynek bármely két y, z elemére az $\{x_0, y, z\}$ hármas ugyanolyan színű?
    (Végtelen sok y, z pár persze lesz, melyekre az $\{x_0, y, z\}$ hármasok azoanos színűek; de nem ez a kérdés.) $\rightarrow$

* 31. (folytatás) Lesz-e olyan végtelen részhalmaz is, melynek minden 3–asa azonos színű? →

VÉGTELEN RAMSEY TÉTEL HALMAZRENDSZEREKRE. *Egy H_0 végtelen alaphamaz összes r elemű részhalmazát kiszínezte valaki pirosra vagy kékre. Bizonyítsd be, hogy keletkezett olyan végtelen részhalmaz, melynek minden r–ese azonos színű.*

32. Igazold a fenti tételt! →

RAMSEY TÉTELE VÉGES GRÁFOKRA. *Tetszőleges k, l és r természetes számokhoz van olyan $R^r(k,l)$, hogy egy $n \geq R^r(k,l)$ elemű alaphalmaz r–eseit pirossal és kékkel színezve biztosan található lesz vagy olyan k elemű részhalmaz, melynek minden r–ese piros, vagy olyan l elemű részhalmaz, melynek minden r–ese kék.*

33. Igazold ezt a tételt is! →

Megjegyzés: A tétel több (akárhány) színre is általánosítható.

Egy alkalmazás: nagy konvex sokszögek

Az alapkérdés:

Igaz-e, hogy elég sok (általános helyzetű) pont közül kiválasztható nagy konvex sokszög?

Precízebben:

Létezik-e minden m–hez olyan K, hogy ha $n \geq K$ pont közül semelyik három sincs egy egyenesen, akkor kiválasztható m darab, amelyek egy konvex m–szög csúcsait alkotják?

A problémát ERDŐS és SZEKERES vetette fel; az itt következő eredmények is tőlük származnak. Kiinduló észrevételük a következő volt:

34. A sík öt általános helyzetű pontja között mindig van négy, amelyek konvex négyszöget határoznak meg. •

A kérdés e feladatban szereplő, igen speciális esetének segítségével (és felhasználva Ramsey tételét) megoldották az általános problémát is:

* 35. Bizonyítsd be, hogy a sejtés minden m–re igaz! •

Következő kérdésük a legkisebb alkalmas K meghatározása lett volna. A továbbiakban ezt $K(m)$–mel jelöljük. Sajnos ennek értékét nem sikerült pontosan meghatározniuk; megoldottak viszont egy rokon feladatot, amiből jó becslés adódott $K(m)$–re is.

Konvex ívek.

Ha az ember megpróbál adott pontokból nagy konvex részt összerakni, és két kis ponthalmazt már talált, ezek nem feltétlenül illeszthetők össze egy nagy konvex darabbá. Ehhez az is szükséges, hogy „egymás felé” legyenek nyitottak; pl. az egyik lefelé, a másik felfelé. (Persze önmagában még ez sem elégséges!)

DEF. A $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ pontsorozat **konvex (konkáv) ív,** ha az x koordináták növekvőek és a $\overline{Q_iQ_{i+1}}$ szakaszok meredeksége monoton nő (csökken). Másszóval akkor, ha van olyan konvex (konkáv) függvénygörbe, amelyre a Q_i pontok illeszkednek.

* 36. Mutasd meg, hogy ha $n \geq R^3(k,l)$ általános helyzetű pont között nincs kettő egymás alatt, akkor tartalmaznak vagy k pontú konvex, vagy l pontú konkáv ívet! →

37. (folytatás) Milyen becslés adódik $K(m)$–re az előző feladatból? →

Lehetséges, hogy kevesebb pont nem is elég? Megpróbáltak nagy ponthalmazt találni, amiben nincs se k pontú konvex ív, se l pontú konkáv.

* 38. Mutass $\binom{k+l-4}{k-2}$ ilyen pontot! •

Ennél többet nekik sem sikerült találniuk. Bebizonyították hát, hogy nem is lehet:

TÉTEL. (ERDŐS–SZEKERES) *Ha a sík* $\binom{k+l-4}{k-2}+1$ *általános helyzetű pontja között nincs kettő egymás alatt, akkor tartalmaznak vagy k pontú konvex, vagy l pontú konkáv ívet!*

39. Milyen becslés adódik $K(m)$–re a tételből? →

A fenti tétel bizonyításához egy Ramsey–típusú segédtételt használtak.

DEF. Rendeljünk a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokon adott teljes gráf éleihez tetszőlegesen $w(P_iP_j)$ súlyokat! Az $i_0 < i_1 < \ldots < i_r$ indexek által meghatározott pontsorozat szomszédos tagjait összekötő $\mathbf{e}_j = (P_{i_{j-1}}P_{i_j})$ élek **monoton növő (csökkenő) élláncot** alkotnak, ha $w(\mathbf{e}_1) \leq w(\mathbf{e}_2) \leq \ldots \leq w(\mathbf{e}_r)$ (illetve ha $w(\mathbf{e}_1) \geq w(\mathbf{e}_2) \geq \ldots \geq w(\mathbf{e}_r)$).

ERDŐS–SZEKERES LEMMA. *Ha* $n \geq \binom{k+l-4}{k-2}+1$, *akkor a fenti súlyozott élű teljes gráfban vagy van k pontú monoton növő, vagy van l pontú monoton csökkenő lánc.*

40. Mutasd meg, hogyan következik a lemmából a tétel! $\rightarrow$

A lemma bizonyítása:

I. Rendeljünk hozzá minden $\mathbf{e}$ élhez egy $\langle a(\mathbf{e}), b(\mathbf{e})\rangle$ számpárt úgy, hogy $a(\mathbf{e})$ ill. $b(\mathbf{e})$ jelöli a leghosszabb olyan növő ill. csökkenő éllánc hosszát, melynek első tagja $\mathbf{e}$.

II. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{e}_1 = (P_iP_{j_1})$ jobb az azonos kezdőpontú $\mathbf{e}_2 = (P_iP_{j_2})$ élnél, ha $a(\mathbf{e}_1) \geq a(\mathbf{e}_2)$, $b(\mathbf{e}_1) \geq b(\mathbf{e}_2)$ és legalább az egyik egyenlőtlenség szigorú.

III. Az $\mathbf{e}$ él a P_i kezdőpontból nézve maximális, ha nincs vele azonos kezdőpontú, nála jobb él.

IV. Végül minden $0 \leq i \leq n$ –re rendeljük hozzá a P_i ponthoz a következő halmazt:

$$H_i = \{\langle a(\mathbf{e}), b(\mathbf{e})\rangle \quad | \quad \mathbf{e} \text{ kezdőponja } P_i \text{ és onnan nézve maximális}\}.$$

Vizsgáljuk meg a fenti H_i–k tulajdonságait:

41. Bizonyítsd be, hogy
   (i) $i \neq j$–re $H_i \neq H_j$;
   (ii) H_i-t egyértelműen meghatározzák a számpárokban szereplő a-k ill. b-k halmazai. $\bullet$

42. (folytatás) Bizonyítsd be a fenti feladat segítségével az Erdős–Szekeres lemmát! $\bullet$

Újra a konvex sokszögek.

** 43. Mutass 2^k általános helyzetű pontot, amelyek között nincs konvex $k+2$–szög! $\rightarrow$

Az előző és a 39. feladat szerint tehát

$$2^{m-2} + 1 \leq K(m) \leq \binom{2m-4}{m-2} + 1 = O(4^m/\sqrt{m}).$$

Sejtés: a bal oldali egyenlőtlenség az éles.

7.3. Véges geometriák (Szőnyi Tamás nyomán)

44. Adj meg egy 7 elemű alaphalmazon 7 darab olyan 3 elemű részhalmazt, hogy bármely kettőnek *pontosan* egy közös eleme legyen! •

DEF. **Véges geometria** egy alaphalmaz olyan részhalmazainak rendszere, melyek közt
- (i) bármely kettőnek *pontosan* egy közös eleme van;
- (ii) az alaphalmaz bármely két eleme együtt benne van valamely kijelölt részhalmazban.

Megjegyzés: Ha az alaphalmazt síknak, a kijelölt részhalmazokat „egyenesek"–nek képzeljük, akkor (i) és (ii) éppen a pontok és az egymással nem párhuzamos egyenesek illeszkedésének axiómái. Innen az elnevezés.

45. Mutasd meg, hogy az előző feladat feltételeinek eleget tevő halmazrendszer szükségképpen véges geometria! →

46. (folytatás) Van-e más, nem csupa háromelemű halmazból álló véges geometria 7 elemen? →

DEF. Egy véges geometria **szabályos**, ha van benne négy általános helyzetű pont, azaz négy olyan, melyek közül semelyik három nincs egy egyenesen. Ellenkező esetben **elfajuló**.

Például a 44.feladat megoldásában szereplő véges geometria szabályos; az előzőben mutatott elfajuló.

47. Legyen E egy véges geometria egy egyenese, p tetszőleges pont, melyre $p \notin E$. Mutasd meg, hogy p–t pontosan $|E|$ darab egyenes tartalmazza! →

Megjegyzés: A következő feladatban részben történeti okokból szerepel elemszámként $q+1$ (és nem q), de már itt is — és a későbbiekben még inkább — ez a jelölés sokkal kényelmesebb lesz.

48. Bizonyítsd be, hogy bármely szabályos véges geometriához van olyan (egyetlen) q természetes szám, hogy
- (i) bármely E egyenesre $|E| = q+1$;
- (ii) minden pont éppen $q+1$ egyenesre illeszkedik;
- (iii) az alaphalmaz q^2+q+1 elemű;
- (iv) a véges geometria q^2+q+1 egyenesből áll. •

DEF. Ezt a q–t nevezzük a véges geometria rendjének.

49. Tegyük fel, hogy létezik q elemű $\mathcal{F}$ véges test! Vegyük az $\mathcal{F}$ –beli elemek három hosszúságú sorozatait! (Ezek $\mathcal{F}$ felett három dimenziós vektorteret alkotnak.) Hagyjuk ki közülük a $(0,0,0)$ vektort és a maradékon definiáljuk a következő ekvivalencia–relációt:

$$(x,y,z) \sim (kx,ky,kz) \qquad \text{ha} \;\; k \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$$

a) Mutasd meg, hogy ez valóban ekvivalencia–reláció!
b) Mekkorák az ekvivalencia–osztályok és hány van belőlük?
c) $q = 2$–re és 3–ra mik ezek az ekvivalencia–osztályok? •

50. Tetszőleges $(a, b, c) \in \mathcal{F}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$–hoz rendeljük az

$$ax + by + cz = 0$$

egyenletnek eleget tevő ekvivalencia–osztályok halmazát!
a) Hány eleműek ezek a halmazok?
b) hány *különböző* ilyen halmaz van?
c) $q = 2$–re mik ezek a halmazok? →

51. (folytatás) Mutasd meg, hogy az előző egyenlettel definiált halmazok a fenti ekvivalencia–osztályokon szabályos véges geometriát alkotnak!

Megjegyzés: $q = p^\alpha$ elemű véges test mindig létezik.

KÖVETKEZMÉNY: Ha q prímhatvány, akkor készíthető q–adrendű véges geometria.

Megjegyzés: Megoldatlan, hogy mely n–ekre létezik n–edrendű véges geometria. Az egyetlen általános eredmény ebben az irányban az alábbi:
(BRUCK–RYSER TÉTEL): Ha $n \equiv 1$ vagy 2 (mod 4), akkor n–edrendű véges geometria csak akkor létezhet, ha n előáll két négyzetszám összegeként.
Ebből például következik, hogy hatodrendű sík nincs. Tizedrendű sík létezését e tétel még nem zárja ki; sokáig megoldatlan volt, hogy létezik-e egyáltalán. 1990 körül bizonyították be kanadai matematikusok (számítógép segítségével), hogy ilyen sík sincs. Ez nem kis feladat! Egy 111 elemű halmaz 11 elemű részeiről van szó; ilyen több, mint 10^{20} darab van. Ezekből kellene 11–et kiválasztani. Ezek végignézéséhez nem elég a gép; ötlet is kell.

Latin négyzetek

DEF. **Latin négyzetnek** nevezünk egy $n \times n$–es táblázatot, melynek minden eleme az $1, 2, \ldots, n$ számok egyike, ha minden sorban és minden oszlopban minden szám pontosan egyszer fordul elő.
Két $n \times n$–es latin négyzet **ortogonális**, ha „egymásra helyezve” őket, mind az n^2 lehetséges számpár megjelenik (és így mindegyik pontosan egyszer).

* 52. Mutasd meg, hogy $n \geq 2$–re akkor és csak akkor létezik n–edrendű véges geometria, ha létezik $n - 1$ darab páronként ortogonális $n \times n$–es latin négyzet!

53. Tegyük fel, hogy valamilyen k–ra és n–re létezik k darab, páronként ortogonális $n \times n$–es latin négyzet. Igaz-e, hogy olyanok is léteznek, amelyek mindegyikében a bal felső elem azonos?

54. Mutasd meg, hogy semmilyen $n \geq 2$–re sem létezhet n darab páronként ortogonális $n \times n$–es latin négyzet!

Vegyes feladatok

55. Tegyük fel, hogy valaki két osztályba osztotta egy n–edrendű véges geometria pontjait, pl. piros és kék színnel színezte őket. Jelölje p_E ill. k_E a piros ill. kék pontok számát egy E egyenesen, és nevezzük az egyenest **egyenletesnek**, ha $p_E = k_E$.
    a) Bizonyítsd be, hogy legfeljebb n^2 egyenes lehet egyenletes!
    b) Keress minden páratlan n–re olyan példát, ahol valóban van is ennyi!
    c) Mutasd meg, hogy az ilyen példa lényegében egyértelmű (a pontok permutációjától eltekintve).

56. Az előző feladat jelöléseivel igazold, hogy

$$\sum_E (p_E - k_E)^2$$

csak a piros és kék pontok *számától* függ.

DEF. Egy szabályos $n^2 + n + 1$ -szög csúcsainak valamely részhalmazát **teljesen szabálytalannak** nevezzük, ha a pontok közötti összes távolság különböző.

57. Ha az említett sokszögnek létezik $n+1$ pontú teljesen szabálytalan részhalmaza, akkor ennek elforgatottjai mint egyenesek véges geometriát alkotnak.

58. (folytatás) Mutasd meg, hogy a szabályos 43–szögnek nincs 7 pontú teljesen szabálytalan része!

59. Keress negyedrendű véges geometriát!

DEF. Egy ponthalmazt akkor nevezünk **általános helyzetűnek**, ha semelyik három pontja sem illeszkedik egy egyenesre.

60. Legfeljebb hány általános helyzetű pontot lehet kiválasztani? →

61. (folytatás) Bizonyítsd be, hogy ha n páratlan, akkor legfeljebb $n + 1$–et lehet! →

DEF. Egy véges geometria pontjainak S részhalmaza **lefogó pontrendszer**, ha minden egyenes tartalmaz S–beli pontot.

62. a) Mutasd meg, hogy n pont nem foghatja le az összes egyenest;
    b) $n + 1$ is csak akkor, ha mind egy egyenesen van;
    c) általános helyzetű ponthalmaz sose lehet jó.

DEF. Egy véges geometria **duálisát** úgy kapjuk, hogy az egyeneseknek pontokat, a pontoknak egyeneseket feleltetünk meg. Pontosabban:
„új pontok": a régi egyenesek.
„új egyenesek": az „új pontok" olyan részhalmazai, amelyeknek megfelelő régi egyenesek egy (régi) ponton mennek át.
Megjegyzés: Van olyan véges geometria, amely nem izomorf a duálisával. A legkisebb ilyen példa 91 pontú.

63. Definiáld a lefogó egyenesrendszer fogalmát és mondj rá az előző feladat a)-b)-c) részeihez hasonló állításokat!

64. Bármely $\sqrt{2n}$ elemű vagy kisebb általános helyzetű ponthalmaz kibővíthető nagyobb általános helyzetűvé. •

65. Ha n páros, akkor bármely $n+1$ darab általános helyzetű $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ ponthoz van *egyetlen* P_{n+2}, hogy a kibővitett ponthalmaz is általános helyzetű. →

66. A mod p feletti véges geometriában adj meg $p+1$ általános helyzetű pontot! (p prím.) →

67. Legyen r rögzített természetes szám! Legfeljebb hány pontot választhatunk ki egy n–edrendű véges geometriából, ha minden egyenesről csak r–et vagy kevesebbet vehetünk? →

68. (folytatás) Mutasd meg, hogy $rn-n+r$ ilyen pont csak akkor létezhet, ha $r|n$.
Megjegyzés:
    1. A fenti méretű alkalmas ponthalmaz létezésére általános elégséges feltétel nem ismert. Annyit lehet tudni, hogy $n=2^m$ esetén az $r|n$ feltétel elégséges is; $n=3^m$, $r=3$–ra azonban kevés.
    2. Az előző feladat a 61. probléma általánosítása; ott $r=2$.

69. Készíts „új axiómarendszert" a véges geometriákra, amely csak a halmazok (vagyis az alaphalmaz, az egyenesek és ezek metszetei) méretére vonatkozó feltételekből áll! (lásd 48. feladat.) →

70. n^2+n+1 elemen (most nincs véges geometria !) keressünk lehetőleg kevés $n+1$–es részt, hogy
    (i) bármely kettőnek legyen közös eleme, és
    (ii) a halmazrendszer az (i) tulajdonságra nézve maximális (azaz nem bővíthető) legyen!

    Mutasd meg, hogy
    a) legalább $n+2$ kell;
    b) ennyi elég is, ha n páratlan.

71. Ha $n>2$, akkor van olyan lefogó ponthalmaz, ami nem tartalmaz egyenest. →

    Probléma: (Erdős P.) Létezik-e olyan (n–től független) c konstans, hogy bármely véges geometriában található lefogó ponthalmaz, amely minden egyenesről legfeljebb c darab pontot tartalmaz?
    Megjegyzés: A c konstans helyett $\log n$–nel az állítás igaz.

72. Ha a H lefogó ponthalmaz nem tartalmaz egyenest és $|H| > n\sqrt{n}+1$, akkor egy alkalmasan választott pontjának elhagyása után is lefogó marad.

    Megjegyzés: (Pelikán–Bruen tétel) Ha a H lefogó ponthalmaz nem tartalmaz egyenest, akkor $|H| \geq n+\sqrt{n}+1$, és egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha létezik $\sqrt{n}$ elemű véges geometria.

    Sejtés: mod p feletti véges geometriában $|H| \geq \frac{3}{2}p$.

7.4. Klasszikus extremális halmazrendszerek

Sperner tétele

73. Hány részhalmazát tudod kiválasztani az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak, ha semelyik kettő sem tartalmazhatja egymást? •

DEF. SPERNER–RENDSZER–nek nevezzük az $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ halmazrendszert, ha $i \neq j$ esetén $A_i \not\subseteq A_j$.

DEF. Az $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \{1, 2, \dots, n\}$ bővülő halmaz–sorozatot **lánc**nak nevezzük. A lánc **elemei** az A_i halmazok.

74. Sperner–rendszer egy láncnak csak egy elemét tartalmazhatja.

DEF. **Teljes lánc** n elemű halmazon: $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = \{1, 2, \dots, n\}$, ha minden $i \leq n$–re $|A_i| = i$.

75. Hány különböző teljes lánc van az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazon? →

76. $X \subset \{1, 2, \dots, n\}$ hány teljes láncban van benne? →

77. Mely X–eket tartalmazza a legkevesebb teljes lánc? •

78. Bontsd fel az $\{1, 2, \dots, n\}$ összes részhalmazainak rendszerét $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ (nem feltétlenül teljes) láncra! •

SPERNER TÉTELE: Ha $A_1, A_2, \dots, A_m$ Sperner–rendszer az $\{1, 2, \dots, n\}$ alaphalmazon, akkor

$$m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha minden A_i vagy $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, vagy $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ elemű. (Páros n–re csak $\frac{n}{2}$ lehet.)

79. Bizonyítsd be a Sperner–tételben szereplő egyenlőtlenséget
    a) a 77. feladatból;
    b) a 78. feladatból! •

80. Legyen n páratlan, $0 < k < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ és vegyünk k darab tetszőleges $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű, továbbá $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} - k$ darab tetszőleges $\lceil n/2 \rceil$ elemű részhalmazt. Mutasd meg, hogy lesz ezek között két, egymást tartalmazó! •

81. Bizonyítsd be, hogy Sperner tételében csak az ott felsorolt halmazrendszerekre teljesül egyenlőség! •

82. Legyen $H_1, H_2, \ldots, H_m$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ alaphalmaz bizonyos részhalmazainak olyan rendszere, hogy $H_i \not\subseteq H_j$ ha $i \neq j$. Jelöljük m_k–val a k elemű H_i–k számát! ($k \leq n$.) Bizonyítsd be, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{m_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

* 83. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ legyenek adott pozitív számok, melyekre $a_i \geq 1$ minden i–re. A belőlük képezhető (akárhány a_i–t tartalmazó) 2^n darab összeg közül legfeljebb hány eshet egy egységnyi hosszúságú nyílt intervallumba?

Erdős–Ko–Rado tétel

84. Legyen k és n adott természetes szám. Hány k elemű részhalmazát tudod kiválasztani az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, ha bármely kettőnek metszenie kell egymást? •

85. Egy szabályos n–szög csúcsainak hány különböző k elemű részét lehet kiválasztani úgy, hogy
   (i) mindegyik egymást követő csúcsokból álljon, azaz valamely i–re $\{i, i+1, \ldots, i+k-1\}$ (mod n) alakú legyen;
   (ii) bármely kettőnek legyen közös pontja. •

Erdős–Ko–Rado tétele: Ha $k \leq n/2$ és az $A_1, A_2, \ldots, A_m \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ halmazokból bármely kettő metszi egymást, akkor

$$m \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

86. Bizonyítsd be az Erdős–Ko–Rado tételt! •

Még két Erdős tétel

Mekkora lehet egy halmazrendszer, ha csak annyit teszünk fel róla, hogy teljesíti a véges geometriák (i) feltételét?

Erdős–DeBruijn tétele: Legyenek $H_1, H_2, \ldots, H_m$ egy n elemű alaphalmaz olyan részhalmazai, melyekre $|H_i \cap H_j| = 1$, ha $i \neq j$. Ekkor $m \leq n$; továbbá $m = n$ akkor és csak akkor, ha a halmazrendszer egy (esetleg elfajuló) véges geometria.

Megjegyzés: E tétel általánosítása (bár az extrém rendszerekről nem mond semmit) a később szereplő Bose–Fisher–Ryser tétel.

DEF. Egy $X_1, X_2, \ldots, X_k$ halmazrendszert **Δ–rendszernek** nevezünk, ha minden $i < j \le k$–ra az $X_i \cap X_j$ közös részek azonosak (esetleg mindnyájan üresek is lehetnek).

ERDŐS–DEBRUIJN TÉTEL. *Ha egy r elemű halmazokból álló halmazrendszer több, mint $r!(k-1)^r$ (különböző) halmazból áll, akkor kiválasztható belőle k tagú Δ–rendszer.*

87. Igazold a fenti tételt. →

PROBLÉMA (ERDŐS). *Létezik-e olyan $c > 0$ konstans, hogy c^k darab (különböző) 3 elemű halmazból mindig kiválasztható k tagú Δ–rendszer?*

7.5. Lináris algebrai módszerek

Bose–Fisher–Ryser tétel

TÉTEL: Legyenek $H_1, H_2, \ldots, H_m$ egy n elemű halmaz részhalmazai. Tegyük fel, hogy van olyan k természetes szám, hogy $|H_i \cap H_j| = k$, ha $i \ne j$. Ekkor $m \le n$.

88. Legyen v_i a tételben szereplő H_i halmaz karakterisztikus 0–1 vektora ($i \le m$), azaz $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in})$–re

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, ha } j \in H_i; \\ 0 & \text{, ha nem.} \end{cases}$$

a) Mutasd meg, hogy a v_i–k lineárisan függetlenek!
b) Bizonyítsd be ebből a Bose–Fisher–Ryser tételt! →

89. Legyen adva a síkban n egyenes, melyek nem mind mennek át egy ponton és nincs közöttük két párhuzamos. Biz.be: legalább n metszéspontjuk van.

Páros– és Páratlanfalva (Babai László – Frankl Péter nyomán)

Párosfalván drákói rendszabályokat vezettek be a túlságosan elszaporodott klubok és társaságok számának korlátozására. Az egyesülési törvény párosfalvi változata három paragrafusból áll:

0.§ Két klubnak, egyesületnek, társaságnak (a továbbiakban: „klub") nem lehet teljesen azonos a tagsága.
1.§ Minden klubnak páros számú tagja legyen!
2.§ Ugyancsak páros legyen bármely két klub közös része (tehát azok száma, akik mindkettőnek tagjai)!

A helység 32 felnőtt lakosa (16 házaspár) szinte osztatlan ellenszenvvel fogadta a — szerintük — személyi jogaikat korlátozó szabályokat és természetes reakcióként csak azért is lázas klub-alapításba kezdtek. Mindenekelőtt bejegyeztették az ÜRES KLUB–ot nulla taggal (hiszen a 0 páros szám), majd számolgatni kezdtek, hány klubot tudnának még alapítani.

90. Te hányat tudsz?

91. (folytatás) Ha a létszám párosságát úgy biztosítják, hogy a házastársak együtt lépnek (vagy nem lépnek) be az egyes klubokba, hány egyesület lehetséges? →

Szinte megbénítja már a helyi adminisztrációt a fenti sokezer klub bejegyzésével kapcsolatos rengeteg teendő. Kormánybiztos kinevezését kérik, aki meg is érkezik. Miután szakértőkkel konzultált, kihirdeti, hogy az előző három paragrafust a következőképpen módosítja:

1.§ Minden klubnak **páratlan** számú tagja legyen!

2.§ Bármely két klub közös része (mint eddig is) **páros** legyen!
Továbbá: az új 1.§–ra való tekintettel a helység neve „PÁRATLANFALVÁ”–ra változik.

Megjegyzés: A 0.§ feleslegessé vált (miért?).

A lakosok nem tiltakoznak, hanem jót nevetnek a markukba és ismét tömeges klub-alapításba fognak.

92. Az önfeláldozó polgármester felajánlja, hogy kilép minden klubból, ahol eddig tag volt és belép mindegyikbe, ahová eddig nem. Megengedi-e ezt az új szabály? •

93. Te hány klubot tudnál most alapítani?

94. (folytatás) És hány, csupa 31 tagút? •

95. Lehet-e egy 31 tagú és 31 héttagú egyesületet szervezni? →

Eddig minden változatban maximum 32 klub jött össze. A következő feladatok célja, hogy segítsünk a lakosságnak eldönteni, lehetséges-e ennél több.

96. Tegyük fel, hogy m klub van. Rendeljünk hozzájuk egy–egy v_i $(1 \leq i \leq m)$ 32 hosszúságú 0–1 vektort! (Az k–edik helyen az egyes jelentse azt, hogy a — névsor szerint — k–adik lakos tagja a megfelelő klubnak; a 0 azt, hogy nem.) Fogalmazzuk át az 1. és 2.§–okat a $v_i v_j$ skalárszorzatokra! →

97. (folytatás) Mutasd meg, hogy a v_i–k lineárisan függetlenek! (Hivatkozhatsz arra, hogy ha egy egész együtthatós homogén lineáris egyenletrendszernek van nem-triviális megoldása, akkor van csupa racionális számokból álló is – miért?) •

KÖVETKEZMÉNY: n elemű halmaznak legfeljebb n részhalmaza választható ki, ha megköveteljük, hogy Páratlanfalva törvényei teljesüljenek rájuk.

98. Mutasd meg, hogy
   a) ha a mod 2 test (szokásos jelölése GF(2)) feletti néhány vektor lineárisan független, akkor őket $\mathbf{R}$ feletti vektoroknak tekintve is függetlenek lesznek!
   b) Ez fordítva nem igaz – mutass példát! •

99. Gondold végig a fenti Következmény bizonyítását GF(2) feletti vektorokkal is!

100. Egy városban piros és kék jelvényes klubok működnek: $P_1, P_2, \ldots, P_m$ és K_1, K_2, …, K_m (ugyanannyi). Két szabály van: $\forall |P_i \cap K_i|$ páratlan és $|P_i \cap K_j|$ páros, ha $i \neq j$. Bizonyítandó: $m \leq n$.

101. Egy város lakóinak száma n, páratlan. A klubok száma m, mindegyiknek páros számú tagja van és bármely kettőnek páratlan számú közös. Biz. be: $m \leq n$.

* 102. Egy város lakóinak száma n, páros. A klubok száma m, mindegyiknek páros számú tagja van és bármely kettőnek páratlan számú közös. Biz. be: $m \leq n-1$. Lehet-e egyenlőség?

103. Legfeljebb hány klubot alapíthatnak n lakosú MOD-3-FALVA lakói?
[Bármely $|A_i| \not\equiv 0 \pmod 3$ és $\forall |A_i \cap A_j| \equiv 0 \pmod 3$.] $\rightarrow$

104. Az n lakosú MOD-6-FALVÁN legfeljebb $2n$ klub működhet.
[Bármely $|A_i| \not\equiv 0 \pmod 6$ és $\forall |A_i \cap A_j| \equiv 0 \pmod 6$.]

III. RÉSZ

Ötletek és eredmények

Ötletek és eredmények az 1. Fejezethez

1.1. $25^3 \cdot 10^3$
1.2. a) $9 \cdot 10^5$ b) $9 \cdot 10^4 \cdot 9 = 9^2 \cdot 10^4$
1.3. $n!$.
1.4. A földszint háromféle lehet; a továbbiak az előző függvényében kétfélék. Eredmény: $3 \cdot 2^n$.
1.5. b) Először Kovács úrnak választunk valamit, majd a maradék két tisztségre egy–egy embert: $3 \cdot 14 \cdot 13$.
1.6. $57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54 \cdot 53 \cdot 52 = \frac{57!}{51!}$.
1.8. 2^{mn}
1.10. a–b) 2^n (minden elemről külön dönthetünk).
1.11. Minden oszlopba egyet tehetünk úgy, hogy ne kerüljön kettő egy sorba: 8! lehetőség.
1.12. $9 \cdot 10^2$ (az első három jegy ennyiféle lehet; a többit ezek meghatározzák).
1.13. k^n (minden $a \in \mathbf{A}$–ról külön dönthetünk). *Vigyázat!* az ember hajlamos felcserélni k–t és n–et!
1.14. $n!$.
1.15. $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1)$. Ez n tényező.
1.16. 3^{13}.
1.17. $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_r+1)$.
1.18. $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$.
1.19. Nem 100! $157 - 56 = 101$.
1.20. A 0–t is érdemes természetes számnak venni, bár kiesik: $10^6 - 10^5$. (l. még a 2. feladat megoldását.)
1.21. $6^{10} - 5^{10}$.
1.22. $15 \cdot 14 \cdot 13 - 14 \cdot 13 \cdot 12$. Lásd 5. feladat.
1.23. a) 9! b) mindkettő 4! c) 9!/4!
1.25. $\frac{20!}{8! \cdot 5! \cdot 7!}$
1.28. $\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$
1.32. 9^6
1.33. $n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = (n!)^2$
1.35. $9 \cdot 10^5 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$
1.41. Ragasszunk színes matricákat az édességekre, majd vegyük le őket!
1.44. $\frac{(2n)!}{2^n}$
1.45. $52!/(13!)^4$
1.46. $4!\frac{48!}{(12!)^4}$ (osszuk külön az ászokat, külön a többit).
1.47. $4\frac{48!}{(13!)^3 \cdot 9!}$ (adjuk valakinek az ászokat, majd osszuk ki a többi lapot)
1.55. $n^{d(n)/2}$, ahol $d(n)$ az osztók száma; lásd 17. feladat.
1.56. $2^{\binom{n}{2}}$ (minden élről külön dönthetünk).
1.63. Maximális rossz: $14 + 14 + 12 + 14 + 10 + 10 = 74$. Így 75 elég lesz.
1.72. $(4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3)/2 = 48/2 = 24$.
1.78. Nevezzünk egy szakaszt ill. háromszöget *jónak*, ha végpontjai ill. csúcsai különböző színűek. Mutasd meg, hogy ha az összes jó (kis) háromszögre összeadjuk

a jó oldalszakaszok számát, akkor páratlan számot kapunk. Ebből már adódik, hogy a jó kis háromszögek száma is páratlan — tehát nem nulla.

1.79. a) $\sum \binom{d_i}{2}$. b) legfeljebb $\frac{2e}{n}\left(\frac{2e}{n}-1\right)/2 = \frac{e(2e-n)}{n^2}$.

1.83. Először azt igazold, hogy a kezdőpontot tetszőlegesen megközelíti a végpontok sorozata.

1.84. $\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}$ (l. az alapfokú „... és ha többször is megszámoltuk?” részt!)

1.85. $n(n-1)$

1.89. $\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}$

1.99. a) válassz hozzá a többi $n-1$–ből $k-1$–et! b) válassz a többi $n-1$–ből k–t!

1.104. a) cseréld fel $(x+y)^n$–ben x–et és y–t! b) minden k elemű részhez rendeljük a komplementerét (azaz a maradék $n-k$ elemből álló halmazt)!

1.105. 2^n

1.106. Ha az alaphalmaz páratlan, az állítás triviális. Páros n–re vegyük külön az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon részeit, amelyek az n–et tartalmazzák és külön azokat, amelyek nem.

1.108. Az $n+1$ elemű halmaz $k+1$ elemű részeit osztályozd aszerint, melyik a legnagyobb elemük. Próbálj olyan megoldást is keresni, ami $x+y$ hatványait használja!

1.113. A Pascal-háromszög $2n$–edik sorában levő $2n+1$ darab binomiális együttható összege $2^{2n} = 4^n$. Közülük a középső a legnagyobb.

1.115. Válassz (a) k tagú bizottságot és belőle elnököt;
(b) egy elnököt és a maradékból $k-1$ darab bizottsági tagot.

1.116. Használj komplex számokat!

1.117. Osztályozd $r+s$ elem n–eseit aszerint, mennyit tartalmaznak az első r–ből ill. az utolsó s–ből!

1.125. $\binom{50}{3}\cdot\binom{30}{2}$

1.127. $\binom{n}{k}$ (az értékkészlet meghatározza a függvényt).

1.131. $\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}$

1.143. A leemelt könyvek sorszámaiból álló, a feltételt teljesítő k tagú sorozatokhoz rendelj feltétel nélküli, de azért szigorúan monoton sorozatokat. Az eredmény: $\binom{n-k+1}{k}$.

1.144. $10^{40} = 2^{40}5^{40}$, $20^{30} = 2^{60}5^{30}$. Osztóik száma $41\cdot 41$, ill. $61\cdot 31$. Közös osztó $41\cdot 31$ van. Eredmény: $41^2 + 61\cdot 31 - 41\cdot 31 = 2301$.

1.146. 4.

1.147. $30-(12+14+13)+(5+4+7)-3$

1.149.

$$\sum|\mathbf{A}_i| - \sum|\mathbf{A}_i\cap\mathbf{A}_j| + \sum|\mathbf{A}_i\cap\mathbf{A}_j\cap\mathbf{A}_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|\mathbf{A}_1\cap\mathbf{A}_2\cap\ldots\cap\mathbf{A}_n|$$

1.160. **b)** $\binom{2}{2}\sum|A_i\cap A_j| - \binom{3}{2}\sum|A_i\cap A_j\cap A_k| + \binom{4}{2}\sum|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l| - \ldots$
(Milyen azonosság kell ide?)

1.163. Először oldd meg úgy, hogy a részek számozottak!

1.165. $n = 1, 2$–re 2 ill. 3 lehetőség van. Válassz szét két esetet aszerint, hogy az első tag a vagy b. Eredmény: F_{n+2}.
1.166. $d \mid F_n$ és $d \mid F_{n-1}$ esetén $d \mid F_{n-2}$ is igaz. Ezt ismételve $d \mid 1$–nek is teljesülnie kell.
1.167. Tekintsd a Fibonacci–sorozatot mod m. Periódikus lesz.
1.170. $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$–ből $q^2 = q + 1$, vagyis $q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ megfelelnek. (Érdekes, hogy az egyik *váltakozó előjelű* mérteni sorozatot ad.)
1.178. lásd a 172. feladatot.
1.180. A bal oldal az $\int_0^1 x^r dx$ integrál egy közelítő összege.
1.181. $f^r(n)$ a 0–tól n–ig terjedő integrálnak felső összege, a 0–tól $n + 1$–ig terjedőnek alsó összege.
1.182. $\Delta^n a_n = \sum (-1)^i \binom{n}{i} a_i$.
1.183. $\sum \binom{n}{i} a_i$.
1.184. Forgasd el az ábrát jobbra 120^o–kal és használd az előző feladatot! Eredmény: $a_n = \sum \binom{n}{i} \Delta^i a_0$.
1.187. Az előző feladatból r szerinti teljes indukcióval következik.
1.188. $p_2(n + 1) = p_2(n) + (n + 1)$–ből $p_2(n) = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + 1$.
1.189. $p_3(n + 1) = p_3(n) + p_2(n)$–ből $p_3(n) = \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + 1$.
1.190. $\sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$.

Ötletek és eredmények a 2. Fejezethez

2.2. Nincs. n pont esetén 0–tól $n - 1$–ig minden fokszámnak elő kellene fordulnia, de a két szélső egyszerre lehetetlen.
2.3. a) igen; b) nem (hány éle lenne egy ilyen gráfnak?)
2.4. Nincs. (Hány él menne az első négy pontból a másik négybe?)
2.6. Használd az előző feladatot!
2.7. Egy leghosszabb út egyik végpontjából indul él az út valamelyik pontjába.
2.9. Egy legrövidebb séta biztosan út lesz, különben kihagyhatnánk belőle egy (vagy több) körsétát.
2.10. Séta biztosan van; vegyél egy legrövidebbet!
2.12. Nem. Azon keresztül bármely két pont között vezetne séta; egyesítésük is összefüggő lenne.
2.13. Ha nem lenne az, mennyi lehetne a (leg)kisebb komponens egyik pontjának foka?
2.14. Nem. Két n–pontú komponens ellenpélda.
2.15. Igaz.
2.21. a)–b) Használd az előző feladatot; egy maximális séta biztosan Euler. c) Ez csak tréfa; ilyen gráf nincs, lásd 6. feladat.
2.25. a) Igen. b) Nem. A 25. lépés után a kiindulóval ellentétes színű mezőn leszel.
2.26. Már az a) részre is tagadó a válasz; figyeld a négy középső mezőt és a sarkokat!
2.30. Indukciós lépés: végy egy minimális fokú x pontot és egyik y szomszédjával, melynek foka kisebb $n - 1$-nél, húzd őket össze egyetlen ponttá! Ha ilyen y nincs, egyszerűen hagyd el x-et.

2.35. Igen. Ha minden pont legalább másodfokú volna, lenne a gráfban kör.

2.36. Teljes indukció n szerint. Az előző feladat szerint van elsőfokú pont; azt hagyd el!

2.37. $n - k$

2.41. Igen. Egyet tudunk (35. feladat). Indulj el belőle; csak egy másikban akadhatsz el.

2.44. A Petersen gráfból indulva készíthető ellenpélda 12 ponton. Használd a 2.32/c. feladatot.

2.45. b) Ha nincs 3–nál nagyobb fokú pont.

2.50. Nem.

2.51. lásd a 17. feladatot!

2.53. Vegyél egy feszítő fát!

2.54. Csak azokból, amelyekben van kör (nem fák).

2.55. Valamelyiknek $n-1$–nél több éle van.

2.56. A 39. feladat szerint az új él két végpontja között pontosan egy út vezet.

2.57. Vegyél egy feszítő erdőt és alkalmazd az előző feladatot!

2.58. Vegyél egy feszítő fát!

2.60. Ha az a–b élt elhagyva a maradék szétesne és pl. az a–t tartalmazó komponensben lenne további pont, akkor a szétvágó pont volna.

2.62. Igaz. Sem az új pont, sem a régiek nem vághatják szét.

2.63. Vegyél a gráfhoz egy új pontot és V_1 tetszőleges két pontját kösd össze vele. Használd az előző és a 61. feladatot!

2.64. a) maga a definíció;
b) az előző feladat szerint igaz, ha G kétszeresen összefüggő. Visszafelé, ha pl. az x csúcs szétvágná y–t és z–t, akkor az x–ből y–ba menő utak nem érinthetnék z–t.

2.65. Igaz!

2.68. Tegyük fel, hogy lenne két különböző közös pont. Ekkor a két blokk egyesítése is kétszeresen összefüggő volna, mert egyetlen pontja sem lehetne szétvágó.

2.72. Vegyél egy maximális kört és bizonyítsd be, hogy minden pont benne kell legyen!

2.74. A nyertes (aki a legtöbb győzelmet aratta) biztosan ilyen.

2.75. A győztes legyőzői között lesz ilyen.

2.78. n=3–ra a körbeverés jó. Minden jóhoz hozzávehetsz két újabb pontot; így indukcióval minden páratlanra van. Kell még n=6–ra (próbáld meg!) és onnan újabb indukció.

2.79. $p_n \leq (3/4)^{n-2}\binom{n}{2}$

2.85. Mindkét irányban megy legalább egy él.

2.86. Az előző megoldás elégséges is: ha x–ből nem minden pontba lehetne eljutni, akkor a belőle elérhetőek halmazából nem vezetne ki él.

2.88. Egy háromszög vagy egy csillag. Ha nem kötjük ki, hogy összefüggő legyen, akkor még néhány izolált pontot is hozzávehetünk.

2.89. $2^{\binom{n}{2}}$

2.93. Izolált pontokból, utakból és körökből.

2.94. Tedd fel, hogy nincs. Vegyél egy *legrövidebb* utat, amely a két eredeti út valamely pontjait köti össze. Ennek segítségével az első kettőnél hosszabbat rakhatsz össze.

2.95. a)–b) Tekints egy leghosszabb utat! d) Nem.

2.98. Párosítsd össze valahogy a páratlan számokat!

2.101. A páros összeg mellett szükséges (és azzal együtt elégséges is) bármely $k \leq n$–re $\sum_{i=1}^{k} \max\{0, d_i - (k-1)\} \leq \sum_{i=k+1}^{n} d_i.$

2.103. Teljes indukció n szerint. d_1 biztosan 1. Kösd össze az 1–es és az n–edik pontot és hagyd ki az előbbit; az n–edik új foka legyen $d_n - 1$.

2.105. Ha kétosztályú, akkor nyilván páros. Másrészt, ha az előző feladatra jó módszert adtál, az pontosan akkor fogja azt jelezni, hogy a kettéosztás lehetetlen, ha páratlan kört talál.

2.106. Egy legnagyobb élszámú páros részgráf minden pontjának foka legalább az eredeti gráfbeli fokszám fele (különben áttennénk).

2.112. a) cseréld ki a kör F_1–beli éleit a nem–F_1–beliekre!
b) ugyanaz az útra.

2.113. A $(B_1 \cup C_1)$–beli pontok csak B_2–beliekkel lehetnek összekötve.

2.115. Vegyél egy maximális élszámú párosítást!

2.118. Használd az előző Hall–tételt (115. feladat)!

2.120. Reprezentáld az őröket egy-egy csúccsal, az őrhelyeket két–két csúccsal!

2.123. Használd az előző Hall–tételt (115. feladat)!

2.125. Igen. Az előző ötlet akkor is működik.

2.137. Repezentáld a nem-nulla elemeket páros gráffal: $x \in V_1$–et és $y \in V_2$–t kösd össze, ha a mátrixban $a_{ij} \neq 0$.

2.143. Keress lefogó pontrendszert annyi ponttal, ahány éle F–nek van és alkalmazd az előző feladatot!

2.148. Legfeljebb $n - d$ független él létezhet.

2.156. Éppen a páros gráfok.

2.157. Vedd sorra a pontokat. Mindegyiknél legfeljebb d tiltott szín van; legalább egy lehetőség mindegyikhez lesz.

2.158. Válassz egy a szétvágó pontot és színezd a részeket (mindegyikbe beleértve a–t is) úgy, hogy a mindig piros legyen!

2.161. Vedd sorra a pontokat növekvő x–koordináta szerint!

2.162. Nem.

2.163. Vedd a csúcsokat olyan sorrendben, hogy az utolsó foka k–nál kisebb legyen és rajta kívül bármely másikból vezessen él későbbi pont(ok)ba!

2.164. Ha az „összekötöttség” reláció tranzitív volna, a gráf teljes lenne.

2.166. Nem. Egy páratlan kör ellenpélda.

2.167. a)–b)–c) normálisak; d) a Petersen gráfban $\omega = 2$, $\chi = 3$; e) és f) sem normális, ha háromnál több pontúak.

2.170. Igen.

2.176. a) lerajzolható; K_3 és K_4 is; a többi nem.

2.177. Ugyanaz.

2.180. Számolj össze minden élt kétszer úgy, hogy minden lapra összeadod az őt határolókat; $3l = 2e$. Ebből és az Euler–tételből: $e = 3n - 6$.
2.181. Húzz be átlókat addig, amíg minden lap háromszög lesz; erre a gráfra használd az előző feladatot!
2.182. Ha minden pont foka legalább hat lenne, az élszám legalább $3n$ volna.
2.185. a) két pont között annyi él, amennyi az eredeti körnek volt;
b) ő maga; c) és d) egymás duálisai.
2.187. Igen. Pl. köss össze két pontot négy különböző hosszúságú úttal.
2.188. Igaz.
2.191. Az Euler–gráfokra; azaz amelyekben minden pont foka páros.
2.192. Néggyel.
2.193. Használj duális gráfokat!

Ötletek és eredmények a 3. Fejezethez

3.1. Először pl. az 500–adikkal hasonlítsd össze! Felezgetéssel tíz (!) alkalmas elem vizsgálata elég.
3.2. 17 összehasonlítás kell.
3.3. Egy kivételével mindegyikről ki kell derítened, hogy van nála nagyobb. Ehhez legalább $n - 1$ összehasonlítás kell. Ennyi elég is.
3.6. $k + l - 1$.
3.7. Egy-egy menetben kettő, négy, nyolc, ..., stb. hosszúságú részeket összefésülve a lépésszám menetenként $O(n)$ és összsesn $\lceil \log_2 n \rceil$ menetre van szükség. Lépésszám: $O(n \log n)$.

Ötletek és eredmények a 4. Fejezethez

4.4. Lásd az előző feladatot!
4.6. Lásd a 182. feladatot.
4.8. Tükrözzük Mary lakóhelyét a part vonalára; arra kell indulnia Billynek. (A „Billy — Mary-tükörképe" utak szükségképpen metszik a partot, így kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a „Billy–folyópart–Mary" utaknak.)
4.10. a) 5 b) 14
4.11. $\binom{27}{12} - \binom{27}{16}$
4.12. $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$
4.27. $a_0 = 0$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$, mert $n - 1$ –et áttéve, a legnagyobb is elmozdítható lesz (korábban nem), majd az $n - 1$ kisebbet kell újra a legnagyobbra juttatni.
4.28. $c_0 = 0$, $c_n = 3c_{n_1} + k \cdot n$.
4.29. $t_0 = 1$, $t_1 = 1$. A rekurzió: $t_n = t_{n-1} + 2t_{n-2}$.
4.35. a) $a_n = a_0 \cdot n!$; b) $a_n = a_0 2^n$.
4.36. $a_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i$.
4.37. $A_0 = a_0$; $A_n = A_{n-1} + b(n)/\lambda^n$.
4.38. $a_n = 2^n - 1$. Ez persze teljes indukcióval is igazolható.
4.39. $a_n = 2^{n+1} - n - 2$. Ez is igazolható teljes indukcióval.

4.40. $C_n := \frac{c_n}{3^n}$–re $C_n = C_{n_1} + k\frac{n}{3^n}$, ahonnan $C_n = kO(1)$. Így $c(n) = kO(3^n)$.

4.41. $\prod\limits_n \lambda_i$.

4.42. $\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$–vel érdemes leosztani.

4.43. Osszál végig $n!$–sal! Eredmény:

$$a_n = \frac{n!}{2}(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \frac{1}{(n-2)!}) \sim \frac{e}{2}n!$$

4.47. Lehet, hogy csak egyféle van, ha $a^2 = 4b$; az is lehet, hogy csak komplex hányadossal találsz (ha $a^2 < 4b$), de ekkor biztosan kétféle van. A mértani sorozat kezdő tagja persze tetszőleges lehet.

4.48. Legyen a két gyök q_1 ill. q_2. Ha x_n–et $c_1{q_1}^n + c_2{q_2}^n$ alakban keressük, a

$$c_1 + c_2 = x_0$$
$$c_1q_1 + c_2q_2 = x_1$$

egyenletet kell megoldanunk. A megoldás $q_1 \neq q_2$ miatt létezik (és egyértelmű).

4.49. $c_1q^n + c_2nq^n$ alakban kereshetjük. A $c_1 = x_0$, $c_1q + c_2q = x_1$ egyenletek megoldhatóak, ha $q \neq 0$, vagyis ha $b \neq 0$, szóval ha a rekurzió valódi másodrendű.

4.50. $x_n = (n+3)2^n$.

4.55. a) $\frac{1}{1-2x}$; b) e^{2x}.

4.57. a) $(-1)^n$; b) 3^n; c) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{, ha } n \text{ páros;} \\ 0 & \text{, ha páratlan.} \end{cases}$ d) $a_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{, ha } n \text{ páros;} \\ 0 & \text{, ha páratlan.} \end{cases}$

4.58. $a_n = \begin{cases} \frac{n!}{(n/2)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n/2+1) & \text{, ha } n \text{ páros;} \\ 0 & \text{, ha páratlan.} \end{cases}$

4.59. $\frac{1}{3}\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}x} = \frac{1}{3}\sum(-\frac{2}{3})^n x^n$.

4.60. Az $1 + x + x^2 + \dots$ végtelen mértani sort akár tagonként deriválva, akár önmagával (minden tagot minden taggal) szorozva $\sum(n+1)x^n$ adódik.

4.61. $\sum\left((n+r-1)(n+r-2)\dots(n+1)/(r-1)!\right)x^n = \sum\binom{n+r-1}{r-1}x^n$.

4.62. a) $a_n = (n+1)2^n$; b) $\frac{1}{25}\dfrac{1}{(1-\frac{x}{5})^2} = \sum(\frac{1}{5})^{n+2}x^n$.

4.63. $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{3^n-1}{2}$.

Ötletek és eredmények az 5. Fejezethez

5.3. Lásd a következő végtelen Ramsey tételt!

5.4. Lásd a következő végtelen Ramsey tétel átfogalmazását!

5.10. Hány másikkal kell egynek–egynek azonos témáról leveleznie? Akiknek valaki *nem* az első témáról ír, azok között hogy lehet elosztva ez a bizonyos téma?

Esetleg másképp megpróbálhatod a tudósokat egy ötelemű halmaz páros elemszámú részhalmazaival kódolni.

5.13. 6. Lásd 6. feladat.

5.15. $M(k,l) = R(k,l)$ megfelel: az $1, 2, \ldots, n$ pontok között húzzál piros élt az i és j pontok közé ($i < j$), ha $a_i < a_j$; kéket egyébként. Használd Ramsey tételét!

5.19. Használd a 12. feladatot!

5.20. Azon színezések száma, amelyekben *van* egyszínű K_k, legfeljebb annyi, mint az egyenlőtlenség bal oldala; a jobb oldalon az összes színezések száma szerepel.

5.21. Ha $n \leq 2^{k/2}$, akkor teljesül a fenti egyenlőtlenség.

5.22. $s = 2$–re tudjuk. Tovább s szerinti indukcióval, az $s-1$–edik és s–edik színeket egyetlen (pl. infravörös) színnel helyettesítve.

5.25. Illessz rá minden n–hez egy–egy n élű utat *egy közös gyökérre!*

5.26. Minden pontból vezet út a gyökérbe. Ez végtelen sok út; a gyökérre illeszkedő *véges sok* él közül valamelyiket ezen utak közül végtelen sok tartalmazza. Ennek másik végpontjára ismételed a gondolatot, ...

5.28. a) Ramsey tételéből következik. b) Ez is igaz. Teljes indukció r–re.

5.30. Rendelj minden elemhez egy számpárt: a vele kezdődő leghosszabb növő ill. csökkenő részsorozat hosszát. Különböző tagokra nem lehet mindkét szám azonos.

5.35. Egy egységnyi oldalú 60^o–os rombuszt (ez két szabályos háromszögből áll) forgass el egy hegyesszögű csúcsa körül úgy, hogy a szemközti csúcs eredeti helyétől éppen egységnyi távolságra kerüljön. Az így keletkező összesen hét pontot vizsgáld!

5.36. Egy alkalmas méretű négyzetrács lapjait színezd az egyik sorban periodikusan 1–es, 2–es és 3–as, a másik sorban 4–es, 5–ös és 6–os, a harmadik sorban 7–es, 8–as és 9–es színűre; s megint elölről.

5.37. Egy hatszögrács (végtelen méhsejt–ábra) lapjait próbáld színezni.

5.38. Alkalmas szélességű, egyik oldalról nyílt, másikról zárt sávokat színezz felváltva pirosra és kékre!

5.39. Ha nem lenne ilyen, akkor pl. egy piros pont körüli egységkör is piros lenne, annak pontjai körüliek is, stb. De a sík bármely két pontja elérhető egymásból egységnyi lépésekkel; az egész sík piros lenne.

5.45. Az élszám:

$$\begin{aligned}
T_3(n) &= \begin{cases} 3k^2 & \text{, ha } n = 3k; \\ 3k^2 + 2k & \text{, ha } n = 3k+1; \\ 3k^2 + 4k + 1 & \text{, ha } n = 3k+2; \end{cases} \\
&= \begin{cases} n^2/3 & \text{, ha } n \text{ osztható hárommal;} \\ (n^2-1)/3 & \text{, ha nem.} \end{cases} \\
&= \lfloor n^2/3 \rfloor
\end{aligned}$$

5.46. Mint a 44.feladatnál, csak "három lépésenkénti" indukcióval $(n-3)$–ról n–re. Az indukciós lépésnél egy háromszögből indulj, ha van. (Ha nincs, használd fel a 44.feladat eredményét!)

5.51. pl. cosinus–tétellel a legnagyobb szögre; elemileg (Pythagoras–tétellel) is lehet.
5.57. A „rossz” pontpárok nem alkothatnak háromszöget.
5.58. a) $n-1$, mert erdő. b) $T_2(n) = \lfloor n^2/4 \rfloor$, mert páros gráf.
5.60. a) $\lfloor n/2 \rfloor$. b) n, ha minden komponense háromszög; több nem.
5.61. $\frac{n(k-1)}{2}$, mert minden pont foka legfeljebb $k-1$.
5.62. lásd a 41.feladatot.
5.63. Elég teljes páros gráfokat nézni. Definiáljunk és használjunk k–cseresznyéket!
5.64. $K_{n/2,n/2}$ nem tartalmazhatja G–t. Így
5.79. Hagyd ki a kétszer használt éleket a P_i–kből ($i \geq 0$). Élidegen utak maradnak.
5.80. Az előző feladat szerint y nem érhető el javító úton. Minden P_i–n töröld az első el nem érhetőbe befutó élt.
5.81. Ismét hagyd ki a kétszer használt éleket.
5.82. Az előző feladat szerint y nem érhető el javító sétával. Minden P_i úton kiválasztunk egy csúcsot:
— ha létezik rajta javító sétával elérhető pont, vegyük az x–től legtávolabbit;
— ha ilyen nincs, vegyük az x utáni elsőt.
Ez a k pont szétválasztja x–et és y–t: a P_i–ken tőlük x felé eső részekből (x–et is beleértve) nem vezethet út a gráf többi részébe (y–ba sem).
5.94. Legalább két pontú fákban legalább két elsőfokú pont van; n–et sose hagyhatjuk ki.
5.98. Készíts olyan Prüfer–kódot, amelyben az i szám $d_i - 1$–szer szerepel! Az ehhez tartozó fa megfelel. Lásd még a 2.103. feladatot.

Ötletek és eredmények a 6. Fejezethez

6.19. Egy max–vissza sorrend utolsó két csúcsa megfelel.
6.20. Vedd a pontokat egyenként, tartsd nyilván 0–tól e–ig indexelt listákban, melyik pontok azok, amelyekből éppen t él megy vissza. ($0 \leq t \leq e$). Az ilyen célú listákat néha „vödröknek” nevezik.
6.22. A p–ből induló élek közül a legkisebb súlyú(ak) másik végpontja(i) legolcsóbban egy lépésben érhető(k) el.
6.25. Minden x pontból húzz irányított élet abba a pontba, ami $W(x)$ utolsó csökkentésekor volt ÚjPont!
6.26. Tartsd a WSPEC értékeket egy *kupacban!* Mind a törlés, mind a csökkentés $O(\log n)$ idő; a minimum kiválasztása konstans.
6.27. $F \cup e$ –ben egyetlen kör van; ennek bármely éle megfelel.
6.28. $F_1 \setminus f_1$ két komponense között F_2–nek megy éle. Ezek bármelyike megfelel.
6.29. Az előző megoldásból adódó f_2 ezzel a tulajdonsággal is rendelkezik, ha úgy választjuk, hogy benne legyen $F_2 \cup f_1$ (egyetlen) körében.
6.30. Nyilván körmentes, mert úgy választottuk az éleket. Ha nem lenne összefüggő, akkor két komponense között kihagytunk volna legalább egy élet. Ezek azonban nem zárhatnak kört semmiféle korábban választottal sem; ellentmondás.
6.34. Egy mohón választott él az optimális élrendszerből legfeljebb két, az övénél nem nagyobb súlyút zár ki.

6.35. k_r–et a 27. feladat szerint becserélhetjük M–be úgy, hogy elhagyjuk $M \cup k_r$ egyetlen körének valamelyik élét. Ez a kör azonban tartalmaz $i \geq r$ indexű élt, mert ellenkező esetben K–nak is köre lenne. Így $M' = (M \setminus m_i) \cup k_r$ megfelel, mert összsúlya legfeljebb akkora, mint M–é.
6.36. Az előző feladat szerint az a minimális fa, amelyik vele a legtovább megegyezik, csak ő maga lehet.
6.37. Ugyanúgy, mint az eredeti algoritmusnál, csak itt a 28. feladatot kell használni.
6.39. Leghosszabb élét nem húzhattuk be.
6.40. Mint az előző feladatban, a kör maximális súlyú élei közül az egyiket nem lehet bevenni.

Ötletek és eredmények a 7. Fejezethez

7.9. A bal végpontok közül a jobbszélső (vagy a jobb végpontok közül a balszélső) jó.
7.10. a) A $(0, 1/n)$ nyílt intervallumok $(i = 1, 2, \ldots)$;
b) Az $x \geq n$ félsíkok.
7.13. a) pl. egy D oldalú szabályos háromszög nem; b) igen (bármely pontja körül rajzolt kör jó).
7.15. Az előző feladat köreire a a 14. feladat szerint használhatod Helly tételét.
7.16. Mint az előző feladat, csak most a végtelen Helly–tételre van szükség.
7.19. Hogy valamely rossz *zárt* félsík (féltér) határán van, az a definíció. Rossz zárt félsíkot elég kevéssel eltolva rossz nyílt vagy zárt félsíkot (félteret) kapunk.
7.30. Igen. Definiáld $H_0 - \{x_0\}$ párjainak színét aszerint, hogy x_0–lal együtt milyen (eredeti) színű hármast alkotnak és használd a végtelen Ramsey tételt (5.21. feladat).
7.31. Igen. Az előző feladat H_1-éből válassz egy x_1–et, hozzá egy H_2–t, ..., stb.
7.32. Indukció r szerint. Indukciós lépésként az előző két feladata általánosítható.
7.33. A végtelen változatból ugyanúgy következik a Kőnig lemma segítségével, mint a gráf–tételeknél láttuk.
7.36. Színezd a ponthármasokat aszerint, hogy konvex vagy konkáv (három pontú) ívet alkotnak.
7.37. $K(m) \leq R^3(m, m)$, mert ennyi pont biztosan elég.
7.39. $K(m) \leq \binom{2m-4}{m-2} + 1$, mert már ennyi pont is biztosan elég.
7.40. A gráf csúcsai a pontok; a P_iP_j él súlya az őket összekötő szakasz meredeksége. Növő (csökkenő) éllánc konvex (konkáv) ívnek felel meg.
7.43. A 38. feladatban definiált halmazokból helyezz el megfelelő pontszámú, „elég lapos” és „elég kicsi” példányokat egy „elég nagy” kör „majdnem függőleges” ívén!
7.45. A hét hármasnak együtt $7 \cdot \binom{3}{2} = 21 = \binom{7}{2}$ különböző párt kell fednie.
7.46. Igen, pl. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és az $\{i, 7\}$ $(1 \leq i \leq 6)$ párok.
7.47. E minden pontján át pontosan egy egyenes megy, ami illeszkedik p–re; ezek az egyenesek mind különbözőek.
7.50. c) Éppen a 44. feladatban szereplő Fano–sík.

7.60. $n+2$ darabot.
7.61. $n+2$ pont esetén minden egyenes vagy 0–t, vagy 2 –t tartalmazna közülük.
7.65. Használd fel egyrészt, hogy $n+1$ egyenes csak akkor foghatja le az összes pontot, ha egy ponton mennek át; másrészt egy általános helyzetű ponthalmazt pontosan egy pontban metsző egyenesek fedik az alaphalmazt.
7.66. Például $\{(x, y, 1); y = x^2\} \cup \{(0, 1, 0)\}$.
7.67. $1 + (r-1)(n+1) = rn - n + r$–et.
7.69. Még az is elég, ha a közös részekre csak azt tesszük fel, hogy pl. *legfeljebb* egy eleműek. (Nem kell kikötni, hogy nem üresek.)
7.71. a) Három, nem egy ponton átmenő egyenes pontjai, kivéve a három metszéspontot: $3(n-1)$ pont.
b) Két egyenes pontjaiból hagyj ki egy–egy pontot (nem a közöset) és vegyél hozzá a két kihagyott pontot összekötő egyenesről egy újat: $2n$ pont.
7.75. Az üres halmazhoz egyenként kell az n elemet hozzávenni; $n!$ lehetséges sorrend van.
7.76. Ha $|X| = k$, akkor $k! \cdot (n-k)!$–ban. Valóban, $A_0 = \emptyset$–tól X–ig $k!$ részlánc van; X–től a teljes n elemű halmazig $(n-k)!$.
7.87. Teljes indukció r szerint.
7.88. Ha van pontosan k elemű H_i, akkor triviális. Ellenkező esetben tedd fel, hogy $\sum \lambda_i v_i = 0$ és emeld négyzetre ezt az egyenletet!
7.91. 2^{16}
7.95. Igen. $31 = 5^2 + 5 + 1$ elemen van (negyedrendű) véges geometria. Ennek minden egyeneséhez vegyük hozzá a harminckettedik elemet!
7.96. $v_i v_j$ páros, ha $i \neq j$; páratlan, ha $i = j$.
7.103. Legfeljebb n–et; pl. az egyeleműek jók. Többet nem lehet; a bizonyítás hasonló Páratlanfalva tételének $GF(2)$ feletti bizonyításához; persze most $GF(3)$ felett.

IV. RÉSZ

Megoldások

Megoldások az 1. Fejezethez

1.52. Eredmény: kettő. Feltehetjük, hogy a tetraéder úgy áll, hogy az alap piros. Fordítsuk magunk felé a kék lapot! A maradék kettőre két lehetőség van.

1.61. Rossz, ha nincs se két fekete, se két kék. Magyarul: mindkét fajtából legfeljebb egy van, vagyis legfeljebb kettőt hoztál. Három zokni között lesz pár.

1.62. Rossz: legfeljebb egy kék van; hozzá legfeljebb 12 fekete lehet. Maximális rossz: 13 darab. Tehát 14 elég.

1.98. **a)** rendre 1, n, n, 1

b) a két szélső $\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$; a középsők értéke $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

1.102. $\binom{9}{6}$

I. megoldás: Írd be minden betűhöz, hányféleképpen juthatsz oda! (Mindegyik a felette ill. mellette lévők összege, ha van olyan.)

II. megoldás: 9 lépés, ebből 6 jobbra.

1.136. Számozd meg a három fajta rágót 1–től 3–ig és (mivel a sorrend mindegy) növekvő sorrendben válogass!

I. megoldás: monoton sorozatot kapsz.

II. megoldás: a 10 rágógumi között, előtt és után 11 hely van, ahol a háromféle közötti két határt megszabhatod. Ezek egybe is eshetnek (ha Donaldot nem veszel). Eredmény: $\left[{3 \atop 10}\right] = \binom{12}{10}$.

1.148. Azokat az elemeket, amelyek egyik $\mathbf{A}_i$–ben sincsenek benne, nyilván pontosan egyszer számoltuk. Ha egy elem éppen k darab halmazban szerepel, akkor beszámoltuk egyszer, levontuk k–szor, hozzáadtuk annyiszor, ahány halmaz*pár*ban szerepel, stb. Összesen tehát

$$1 - k + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \ldots + (-1)^i \binom{k}{i} + \ldots = 0$$

–szor számoltuk, vagyis végül is egyszer sem.

1.150. $\mathbf{A}_i$ jelölje azt, hogy az i–edik dosszié üres marad.

$|\mathbf{A}| = 4^{20}$

$|\mathbf{A}_i| = 3^{20}$

$|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j| = 2^{20}$

$|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j \cap \mathbf{A}_k| = 1^{20}$

$|\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4| = 0$, mert minden papírlap került valahova.

Eredmény: $4^{20} - \binom{4}{1}3^{20} + \binom{4}{2}2^{20} - \binom{4}{3}$

1.151. $\binom{n}{3} - n(n-2) + n = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}$

I. megoldás:

Összes hármas: $\binom{n}{3}$

$\mathbf{A}_i$ esemény: Az i–edik és a rákövetkező benne van; ekkor a harmadikra $(n-2)$ lehetőség marad.

$$|\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j| = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \text{ és } j \text{ szomszédok a körön. (Ilyen párból } n \text{ van);} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

$\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j \cap \mathbf{A}_k$ és a továbbiak lehetetlenek, ha $n > 3$.

II. megoldás: Egyet n féleképpen választhatunk. Szomszédait nem vehetjük, így a könyvespolcos 143. feladatra jutunk, $n-3$ elemmel, közülük $k=2$ választandó. Mindhárom lehetett első, tehát osztunk hárommal is.

1.152. Legyen $\mathbf{A}$ az összes kiválasztás halmaza; $\mathbf{A}_i$ pedig jelölje azokat, amelyeknél kivettük az i–edik párt ($i = 1 \dots 10$).
Eredmény: $\binom{10}{6} - \binom{10}{1}\binom{8}{4} + \binom{10}{2}\binom{6}{2} - \binom{10}{3} \cdot 1$.

1.164. F_{n+1}. Teljes indukcióval bizonyítható:
I. $n = 1$–re igaz.
II. Tegyük fel, hogy n, vagy kevesebb lépcső esetén az állítás igaz. $n+1$ lépcsőn felmenve először vagy egy lépcsőt, vagy kettőt lépünk. Az indukciós feltétel szerint az első változat F_{n+1}, a második F_n különböző módon folytatható. Ez összesen F_{n+2}.

1.172. Az előző feladat jelöléseivel $F_n = c_1{q_1}^n + c_2{q_2}^n$–et $n = 0, 1$–re alkalmazva $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ill. $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ megfelel.

1.173. a) F_{n+2}; különböztesd meg azt a két esetet, hogy az első könyvet levetted-e, vagy sem.
b) $\binom{n-k+1}{k}$; A leemelt könyvek sorszámaiból álló, a feltételt teljesítő k tagú sorozatokhoz rendelj feltétel nélküli, de azért szigorúan monoton sorozatokat.

1.191. Az $a_n = f^4(n)$ sorozatra Δa_n negyedfokú polinom lesz. Így $\Delta^k a_n$ eltűnik, ha $k \geq 6$. Tehát az első néhány tagot és különbségeiket felírva

$$f^4(n) = 24\binom{n}{5} + 60\binom{n}{4} + 50\binom{n}{3} + 15\binom{n}{2} + \binom{n}{1}.$$

1.192. a) Nem. Négy kör csak 14 részre oszt.
b) $n^2 + n + 2$. Ha k_0–t 2–nek vesszük, akkor $k_{n+1} = k_n + 2n$.

Megoldások a 2. Fejezethez

2.11. Igen. Ő egymagában összefüggő részgráf. Ha nem maximális ilyen, akkor bővítsük, amíg lehet. Végül egy, tovább már nem bővíthető összefüggő részt kapunk.

2.16. Tegyük fel, hogy az elhagyott él a maradék gráf két különböző komponensét köti össze! Ekkor két végpontja között nem lehet más út; nem egy kör éle volt.

2.17. Igaz. Az előző feladat szerint amíg a gráfban van kör, addig elhagyva egy kör egyik élét a gráf továbbra is összefüggő marad. Ha már nincs több kör, a maradék részgráf fa. Röviden: egy *minimális* összefüggő részgráf nem tartalmazhat kört.

2.61. Legyen a és b két tetszőleges pont. (Ha vezet köztük él, akkor az előző feladat szerint készen vagyunk.) Mivel G összefüggő, van közöttük út, pl. $a = v_1, v_2, \dots, v_k = b$. Legyen j a legnagyobb index, amelyre van két, közös belső pont nélküli a–v_j út. Megmutatjuk, hogy $j = k$.
Tegyük fel, hogy $j < k$ és vegyünk két a–v_j utat! Ha valamelyiken lenne j–nél nagyobb indexű v, akkor oda is vezetne két jó út, ami lehetetlen. Mivel v_j nem

vág szét, van őt elkerülő út v_{j+1}–ből vissza a–ba; ennek pedig van egy legelső pontja a két a–v_j út valamelyikén. Az eddig terjedő részúttal ill. a $v_j v_{j+1}$ éllel kiegészítve az eredeti a–v_j utak egy–egy részét, két jó a–v_{j+1} utat kapunk.

2.69. Teljes indukció n, a versenyzők száma (vagyis a gráf pontszáma) szerint:

I. n=1–re (vagy n=2–re) igaz.

II. Tegyük fel, hogy az n–nél kisebb számokra már tudjuk és tekintsünk egy n–résztvevős versenyt! Vegyük ki az egyik versenyzőt, pl. a–t. A többiek az indukciós feltétel szerint megfelelően sorbaállíthatók.
Ha a sor elején álló kikapott a–tól (ill. ha a sor végén álló legyőzte a–t), tegyük a–t az első (ill. utolsó) helyre; egyébként pedig az első olyan elé, akit legyőzött.

2.81. Nyilván szükséges, hogy minden pont foka páros legyen. Ez elég is, mert ekkor van (irányítatlan) Euler–körséta; ennek sorrendjében irányítsuk az éleket.

2.82. Az élek irányítását elfelejtve a gráfnak összefüggőnek kell lennie; minden x csúcsra pedig $d_G^-(x) = d_G^+(x)$ legyen. E két feltétel együtt elég is.

2.84. Első rész: egy pontból elérhetők keresése. Második rész: fordítsd meg az összes élet és ugyanabból a pontból újra keresés. Ha mindkétszer minden pontba eljutottál, erősen összefüggő; egyébként nem. Lépésszám: c·élszám.
(Lásd még a 4. feladatot.)

2.124. Az egyik osztály tetszőleges k pontjából $k \cdot r$ él indul. Ezek nem gyűlhetnek össze a másik osztály k–nál kevesebb pontjába, mert ott is r a pontok foka.

2.153. Nem. Legalább két olyan csoport lenne, ahol senki se párja se Karcsinak, se Marcinak. Ezekben páratlan számú gyerek van; közülük egynek–egynek nem jut pár.

2.154. Ha nem teljesülne, akkor nem juthatna minden páratlan komponensbe a kijelölt k pontból pár; egy ilyen komponensből legalább egy elem nem kaphat párt.

2.159. (a) páratlan kör;
(b) páratlan oldalú „kerék" (kör és benne egy tengely „küllőkkel");
(c) páratlan kör és egy teljes gráf; a két rész között minden mindennel összekötve.

2.178. Ha G lerajzolható, akkor az összehúzott is. Visszafelé nem igaz; akár K_5–ből, akár a „három–ház-három–kút"–ból síkbarajzolható gráf keletkezik, ha egy élét összehúzzuk.

2.183. Teljes indukció n szerint. Hagyj ki egy legfeljebb ötödfokú pontot, színezd a maradékot; végül a kihagyott pontnak is jut egy a hat színből, mert öt szomszédja legfeljebb öt színt zár ki.

2.196. Fogalmazzuk meg, milyen G' gráfokra vonatkozik a fenti „bizonyítás": egy r–reguláris és egy 1–reguláris egyesítésére. A hiba ott van, hogy *nem minden* $r+1$–*reguláris* gráfot kaphatunk meg így! (Pl. hat ponton két háromszög nem ilyen, bár 2–reguláris; ez persze ellenpélda az állításra is.)

2.197. Az állítás igaz; a bizonyítás se teljesen rossz, csak hiányos. (A hiba ugyanaz, mint az 196. állításnál, csak ez javítható.) Az hiányzik, hogy *minden* $n+1$ pontú fa előáll alkalmas n pontúból egy él hozzávételével. Ezt úgy mutathatjuk meg, hogy *az* $n+1$ *pontúból* indulunk: elhagyva egy elsőfokú pontot (tudjuk, hogy ilyen létezik), a maradék szükségképpen összefüggő (és nyilván körmentes is) lesz.

2.198. A hiba ugyanaz, mint az előző feladatokban; itt az állítás igaz, de a bizonyítás teljesen rossz. Sok más n pontú gráf is van, nemcsak azok, amelyek egy $n-1$ pontú teljesből plusz még egy élből állnak.

I. Jó megoldás: Indukció n szerint.

a) $n=2$–re igaz.

b) Tfh. n–re igaz, és tekintsünk egy $n+1$ pontú G gráfot! Hagyjuk el G egy olyan x pontját, melynek $d(x)$ foka minimális. (Ekkor $d(x) \geq 1$, mivel ellenkező esetben nem lehetne elég él G–ben.)

Ha $d(x)=n-1$, akkor a többi pont foka is ennyi, tehát a gráf teljes.

Ha $1 \leq d(x) \leq n-2$, akkor legalább

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1-(n-2)=\frac{(n-2)(n-3)}{2}+1$$

él marad egy $n-1$ pontú részen, amire az indukciós feltétel már alkalmazható: $G-x$ összefüggő, és x–et — a belőle induló legalább egy éllel együtt — visszavéve összefüggő gráfot kapunk.

Ha $d(x)=0$, akkor legfeljebb $n(n-1)/2$ él lehet — ellentmondás.

II. Jó megoldás (Elemi szélsőérték–feladattal):

Ha G nem összefüggő, akkor két nem-üres részre osztható, melyek között nem megy él. Legyen az egyik rész pontszáma k, a másiké $n-k$ (nyilván $1 \leq k, n-k \leq n-1$). Hány él lehet a két részben összesen?

$$e \leq \binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}=\frac{k^2-k+(n-k)^2-(n-k)}{2}=\frac{k^2+(n-k)^2}{2}-\frac{n}{2} \leq$$

$$\leq \frac{1^2+(n-1)^2}{2}-\frac{n}{2}=\frac{n^2-3n+2}{2}=\binom{n-1}{2},$$

mert a $k^2+(n-k)^2$ összeg maximuma $k=1$–re (vagy $k=n-1$–re) adódik.

2.199. Nem szabad alkalmazni az indukciós feltételt, mert a maradék gráf nem feltétlenül „jó”!

Helyes megoldás: Vegyél egy *maximális kört* és erre használd a fenti ötletet!

Megoldások a 3. Fejezethez

3.11. Csökkentésnél a gyökér felé indulva ellenőrizzük, hogy az egyenlőtlenség megsérült-e. Ha nem, leállunk; ha igen, kicseréljük az aktuális csúcsot a szülővel és a szülőt ellenőrizzük tovább. Növeléskor hasonló az eljárás, de ellenkező irányban haladunk; ha valamelyik gyereknél kisebb a súly, mint az új érték, akkor a *kisebbik* gyerekkel cserélünk. A törlés olyan, mintha ∞–t írnánk be; a beszúrás olyan, mintha egy új, ∞ súlyú *levelet* vennénk a gráfhoz, majd annak súlyát csökkentenénk.

3.12. $c \cdot nlogn$ nyilvánvaló, ha n–szer veszünk be új elemet. Ennél jobb, ha egy majdnem teljes bináris fát készítünk, ami az egyenlőtlenségeket *nem* teljesíti, aztán a levelek felől indulva szintenként javítunk. Így a levelektől számított k–adik szinten lévő 2^{h-k} darab (itt h a fa szintjeinek száma) csúcs mindegyikénél legfeljebb k lépés az ellenőrzés és javítás. A lépésszám:

$$\sum k 2^{h-k} 2^h \sum \frac{h}{2^k} < 2^h 2 \leq 2n.$$

Megoldások a 4. Fejezethez

4.1. a) $2^{r-1} - 1$. Egyik rész sem üres, és minden valódi részhalmaz pontosan egy kettévágásban szerepel.

b) $\binom{r}{2}$. Ahány lehetőség van az egyetlen kételemű rész választására.

4.2. $S(r,k) = 0$, ha $k < 1$ vagy $> r$. Egyébként $S(r,k) = S(r-1,k-1) + k \cdot S(r-1,k)$, ugyanis az r–edik elem vagy önmaga egy rész, vagy kisebb indexűekhez kerül.

4.3. a) $k^r - k(k-1)^r + \binom{k}{2}(k-2)^r \pm \ldots$

b) $k!S(r,k)$. Eszerint az a) alatti kifejezés osztható $k!$–sal.

4.9. A rossz utak száma egyenlő a $(0,0)$–ból a $(14,4)$–be (azaz a (7,11) tükörképébe vezető) utak számával. Eredmény: összes – rossz = $\binom{18}{7} - \binom{18}{14}$

4.13. Osztályozd a lehetőségeket aszerint, hányadik *pár* után fogy el először az összes tizes. Ha nem rögtön az elején, akkor addig rendre $10Ft, 10Ft, ?Ft, \ldots, ?Ft, 20Ft, 20Ft$ kellett hogy legyen a gyerekeknél és, mivel *közben* nem ürült ki a pénztár, a $10Ft, ?Ft, ?Ft, \ldots, ?Ft, 20Ft$ szakasz egy rövidebb jó sorozat.

4.30. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k}$, ha $n \geq 1$. (Válassz szét eseteket aszerint, hogy hány és pontosan mely $1 \leq x \leq n$–ekre lesz $f(x) = 1$.)

4.44. $\prod_{i=1}^{n+1} \lambda(i) = n+1$, tehát az $A_{n+1} = a_{n+1}/(n+1)$ helyettesítés célszerű. Ebből $A_1 = 0$, $A_{n+1} = A_n + (n-1)$, tehát $A_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, vagyis $a_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$. Ez megsejthető az első néhány tag felírása után a differencia–sorozatokból is; utána teljes indukcióval igazolható.

4.64. $\dfrac{1}{(1+x)(1+3x)} = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{(1+3x)} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1+x)} = \sum (-1)^n \dfrac{3^{n+1}-1}{2} x^n.$

4.70. A második képlethez használd fel a

$$g(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{e^x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{kx}}{2^{k+1}}$$

azonosságot!

Megoldások az 5. Fejezethez

5.5. Jelöljük a végtelen teljes gráf pontjainak halmazát V–vel és válasszunk ki egy tetszőleges $x_1 \in V$ pontot! A belőle induló élek között a két szín valamelyike végtelen sokszor fordul elő (esetleg mindkettő). Választhatunk tehát egy $V_1 \subset V \setminus \{x_1\}$ ponthalmazt úgy, hogy az összes (x_1, y) él egyszínű, ha $y \in V_1$. Válasszuk ebből az $x_2 \in V_1$ pontot tetszőlegesen és ehhez a $V_2 \subset V_1 \setminus \{x_2\}$ halmazt úgy, hogy az összes (x_2, y) él egyszínű legyen, ha $y \in V_2$. (Ez a szín különbözhet az előzőtől, az x_1–ből a V_1 pontjaiba menő élek színétől!) Az eljárást folytatva olyan

$$x_n \in V_{n-1} \subset V_{n-2} \setminus \{x_{n-1}\}$$

pont– és részhalmaz–sorozatot kapunk, melyben *rögzített* n–re az összes (x_n, y) élek egyszínűek, ha $y \in V_n$. (Ez a szín persze n–től függhet.) Következésképpen $k > n$ esetén az összes (x_n, x_k) él azonos, csak n–től függő színű. Két részre osztva az $\{x_n; 1 \leq n < \infty\}$ sorozatot aszerint, hogy ez a szín piros vagy kék, egyszínű K_∞–t kapunk.

5.12. $R^*(2, t) = R^*(t, 2) = t$ triviális. Tovább az előző feladat alapján az $R^*(k, l)$–ek táblázatának átlóin („$k + l$ szerinti") indukcióval. Először a már ismert $R^*(3, 3)$ adódik, majd $R^*(3, 4)$ és $R^*(4, 3) \leq 10$, stb.

5.14. A 11. feladat gondolatmenetét használva megmutathatod, hogy ha egy gráf éleit pirossal és kékkel színezve nincs se piros háromszög, se kék K_4, akkor minden pontra legfeljebb három piros és öt kék él illeszkedhet, ami kilenc (tehát páratlan) pontú gráfban lehetetlen.
Nyolc ponton nem nehéz piros háromszög és kék K_4 nélküli színezést találni, ha figyelembe vesszük az előző fokszám–feltételt.

5.16. Nem. Még $R(d + 2, d + 2)$ sem, mert akkor lenne a pontok között $d + 2$, melyek között minden távolság azonos; ez pedig a feladat elején szereplő állítás miatt lehetetlen. A pontos maximum nem ismert, csak annyit tudnak, hogy $\binom{n+1}{2}$ és $\binom{n+1}{2} + n + 1 = \binom{n+2}{2}$ között van.

5.24. $N(s) = \lceil e{\cdot}s! \rceil$ megfelel. Legyen adva ugyanis az N–ig terjedő természetes számok egy tetszőleges s–osztályozása. Rendeljük ehhez az általuk feszített teljes gráf *éleinek* azt a színezését, ahol az (a, b) él az annyiadik színt kapja, ahányadik osztályban az $|a - b|$ van. Az előző feladat szerint lesz egyszínű háromszög, pl. az $a < b < c$ pontokon. Ekkor $x = b - a$, $y = c - b$ és $z = c - a$ jó megoldás lesz.

5.27. Alkalmazd a König–lemmát arra a fára, melynek n–edik szintjén az $1, 2, \ldots, n$ pontokon értelmezett teljes gráf piros K_k és kék K_l nélküli színezései vannak; a szomszédos szinteken két ilyen színezést köss össze éllel, ha a nagyobbik ugyanúgy színezi a kisebb pontjai közötti éleket, mint a kisebbik. Ha $R(k, l)$ nem létezne, a fa minden szintje nem-üres és véges lenne. Egy végtelen út azonban K_∞ olyan színezését adná, amiben nincs se piros K_k, se kék K_l; a végtelen Ramsey tétel szerint azonban egyszínű K_∞ is van. Több színre a bizonyítás hasonlóan megy.

5.29. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ sorozathoz rendeljük a $V = v_1, v_2, \ldots, v_n \ldots$ pontokon adott végtelen teljes gráf következő színezését: ha $i < j$, akkor

$$(x_i, x_j)\begin{cases} \text{piros}, & \text{ha } a_i \le a_j; \\ \text{kék}, & \text{ha } a_i > a_j. \end{cases}$$

Az egyszínű K_∞ monoton részsorozatot jelent.

5.42. Igazold (és használd fel), hogy $x(n-x) < y(n-y)$, ha $x < y \le n/2$.

Bizonyítás: az előző eredményből igazold (és használd fel), hogy maximális élszámú n–pontú r–osztályú gráfban két osztály mérete között a különbség nem lehet 2 vagy több.

5.44. Teljes indukcióval "két lépésenként":

I. $n = 2$–re és 3–ra (vagy 1–re és 2–re, ízlés szerint) igaz.

II. indukciós lépés *(n-2)–ről n–re*: tegyük fel, hogy az állítást már ellenőriztük $(n-2)$–re és vegyünk egy n–pontú, háromszög nélküli gráfot. Élszáma legyen e. Vegyük ki egy (a, b) élét. (Ha nincs egy éle sem, az állítás nyilván igaz.)

A maradék $n-2$ pontból legfeljebb $n-2$ él jön összesen az első kettőbe, t.i. mindegyikből csak egy–egy, hiszen ha x össze volna kötve a–val is és b–vel is, akkor abx háromszög lenne.

Ez tehát eddig az (a, b) élen kívül max. $(n-2)$ él. Végül az $n-2$ pontú maradék gráfnak legfeljebb $T_2(n-2)$ éle van az indukciós feltétel szerint, hiszen ő sem tartalmaz háromszöget. Így

$$\begin{aligned} e &\le 1 + (n-2) + T_2(n-2) \\ &= T_2(n-2) + n - 1 \\ &= \lfloor (n-2)^2/4 \rfloor + n - 1 \\ &= \lfloor ((n^2 - 4n + 4) + (4n-4))/4 \rfloor \\ &= \lfloor n^2/4 \rfloor = T_2(n) \end{aligned}$$

(lásd még a 40.feladatot.)

5.49. Amíg a gráfban van él, szimmetrizáld egy maximális fokú ponthoz a vele össze nem kötötteket, és ismételd ezt a maradék (még nem szimmetrizált, de minden korábbival összekötött) pontok által meghatározott részgráfra! Amikor az eljárás leáll, egy $\le r$ osztályú(!) gráfot kapunk (miért?), melynek élszáma legalább az eredeti e, és legfeljebb $T_r(n)$.

5.50. *Bizonyítás*–vázlat: r szerinti teljes indukció; r=2–re már tudjuk. Az *indukciós lépésen belül* n–re "r-lépésenkénti" indukció, mint $T_2(n)$–nél.

A belső indukciós lépésnél ($n-r$–ről n–re) egy K_r–ből indulj, ha van. (Ha nincs, használd fel az r–re vonatkozó indukciós feltételt.)

Másképp fogalmazva ugyanezt a gondolatot: tegyük fel, hogy lenne ellenpélda. Vegyél egy olyat, hogy r a lehető legkisebb legyen (azaz kisebb r–re már semmilyen n–nel nincs ellenpélda). Persze erre a minimális r–re még többféle n–nel is létezhetnének ellenpéldák. Vegyél ezek közül egy olyat, ahol n is minimális; erre a gráfra mondd el az $r = 2$–re ill. 3–ra már látott bizonyítást.

5.52. a) Ha a konvex burok négyszög, valamelyik szöge legalább 90°. Ha háromszög, akkor a negyedik csúcsnál keletkező három szög közül valamelyik legalább 120°.
b) Ha három egy egyenesre esik, akkor a legkisebb távolság $\le D/2$. Ha általános helyzetűek, használd (a)–t és az előző feladatot.

5.53. a) három közül a középső megfelel.
b) Indukció n szerint. Indukciós lépés: ha van ≤ 1 fokú pont, hagyd el. Ha ilyen nincs, akkor a) szerint minden pont foka ≤ 2 lesz.

5.54. Köss össze két pontot, ha távolságuk nagyobb, mint $D/\sqrt{2}$. A 53.feladat szerint e gráfban nem lehet teljes négyszög; alkalmazhatod rá a 46.feladat állítását.

5.55. $n = 3$–ra $\lfloor n^2/3 \rfloor = 3$, tehát egy D oldalú szabályos háromszög csúcsai megfelelnek.
Nagyobb n–ek esetén e háromszög csúcsai körül egy–egy $0,001D$ sugarú körívvel a három sarokban három 60°–os körcikket jelölünk ki, és ezekben osztjuk el a pontokat a lehető legegyenletesebben.

5.56. Egy pontpárra legfeljebb két cseresznye illeszkedthet (elemi geometria). Folytatás a 41.feladathoz hasonlóan.
Megjegyzés: Ennél több is igaz! $c \cdot n^{4/3}$–os felső becslés már van [Szemerédi]. Minden k–ra $O(n^{1+1/k})$–t sejtenek. $t_G(n) \ge \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

5.86. Nem.

5.95. Két pontú fa kódja üres; mindkét szám $1 - 1 = 0$–szor fordul elő. Tovább teljes indukcióval: az elhagyott elsőfokú pont nyilván 0–szor fog szerepelni, szomszédjának (amit leírtunk) foka pedig eggyel csökken.

5.99. Ahány különböző Prüfer–kódot készíthetsz az előző feladat megoldásában:

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdot (d_2-1)! \cdot \ldots \cdot (d_n-1)!}$$

Megoldások a 6. Fejezethez

6.18. (Frank A. bizonyítása): Indukció n szerint; $n = 2$ triviális. Ha kevesebb élet hagyunk el, akkor marad $x_{n-2} - x_n$ út is (mert $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n$ egy max–vissza sorrendja $G - \{x_{n-1}\}$–nek) és marad $x_{n-2} - x_{n-1}$ út is (mert $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ egy max–vissza sorrendja $G - \{x_n\}$–nek). Marad tehát $x_{n-1} - x_n$ séta; így út is.

6.23. a) Válaszd azt az $x \ne x_i$ $(i < k)$–t, amelyre $\min_{0 \le i < k}\{W(x_i) + w(x_i, x)\}$ minimális.
b) $\sum_{i<k} d_i^-$, ahol d_i^- az x_i ki-foka.

6.24. x_k–hoz a $\mathrm{WSPEC}(x)$–ek minimumát kell keresni $x \ne x_i$, $(i < k)$–ra. Ez $n - k$ összehasonlítás. Az új $\mathrm{WSPEC}(x)$ értékekbe csak a $W(x_k) + w(x_k, x)$ összszegek szólhatnak bele; ez lesz az új érték, ha kisebb, mint a régi. Ez további d_k^- összehasonlítás.

6.41. a) Egy lépésben minden komponens legalább két pontú lesz; számuk tehát legfeljebb az előző pontszám fele lehet.

b) Nyilván végig körmentes marad, és amikor az eljárás leáll, már csak egy komponense lehet.
c) A Kruskal–éhoz hasonló becseréléssel igazolható.

Megoldások a 7. Fejezethez

7.6. Reprezentáljuk egy páros gráf alsó pontjaival az n elemű halmaz összes k–asát; a felsőkkel a $k+1$–eseket. Kössük össze éllel az egymást tartalmazókat! Minden alsó pont foka $n-k$ (ennyiféleképpen vehetünk hozzá egy elemet); a felsőké pedig $k+1$ (ennyiféleképpen hagyhatunk el). Ekkor $n-k \geq k+1$ miatt teljesül a Hall–feltétel.

7.7. A feltétel szerint léteznek olyan P_{123}, P_{124}, P_{134} és P_{234} pontok, hogy P_{ijk} közös pontja a K_i, K_j és K_k halmazoknak. Ha konvex burkuk négyszög, akkor átlóinak metszéspontja mind a négy K_i–ben benne lesz; ha háromszög, akkor a bele eső negyedik pont jó; ha szakasszá fajul, akkor a két belső bármelyike megfelel.

7.8. $n=4$–re az előző feladat. Tovább teljes indukcióval n szerint:
Adott $K_1, K_2, \ldots, K_{n+1}$ konvex halmazokhoz definiáljuk a

$$H_i = K_i \cap K_{n+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ugyancsak konvex halmazokat. Három H_i közös része négy K_i (éspedig a megfelelő indexűek, valamint K_{n+1}) metszete, így az $n=4$ eset miatt nem üres. Ebből és az indukciós feltételből az következik, hogy

$$K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_{n+1} = (K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_n) \cap K_{n+1} = H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n \neq \emptyset.$$

7.14. A leghosszabb oldal(ak egyikének) két végpontja köré írt a sugarú körök (lencse alakú) közös részének egyik fele (ahol a harmadik csúcs van) tartalmazza H–t. Ennek az „ívelt háromszögnek" a körülírt köre éppen $r = a/\sqrt{3}$ sugarú. Kisebb körbe az a oldalú szabályos háromszög nem fér bele. (Tompaszögű háromszög esetén nem a körülírt kör adja a minimumot; a legnagyobb oldal Thalesz–köre kisebb.)

7.20. Az előző feladat szerint elég annyit megmutatni, hogy a rossz nyílt félsíkok (félterek) nem fedik az egész síkot (teret); belátjuk, hogy még a halmaz konvex burkát (határával együtt értve) sem fedhetik. Magát a halmazt nyilván semelyik $d+1$ egyesítése sem fedi. Helly tételét a *komplementerekre* és a — korlátos — konvex burokra (határával együtt értve) alkalmazva, az összes rossz nyílt féltér komplementerének és a konvex buroknak van közös pontja; végül is ez jó lesz centrumnak.

7.34. Ha a konvex burok öt- vagy négyszög, készen vagyunk. Ha háromszög, akkor a belsejébe eső két pontot összekötő egyenes csak két oldalt metsz; a harmadik oldal két végpontja és a belsők együtt jó pontnégyest alkotnak.

7.35. $K = R^4(m, 5)$ megfelel; ha ennyi pont négyelemű részhalmazait pirosra ill. kékre színezzük aszerint, hogy a pontnégyes konvex-e vagy konkáv, a 34. feladat alapján nem lehet öt pont minden négyese kék. Ramsey tétele szerint van tehát m pont, melyek minden négyese piros. Ezek konvex m–szöget alkotnak.

7.38. Kettős indukció k–ra és l–re. Ha $k = 3$ vagy $l = 3$, akkor egy $l - 1$ pontú konkáv (ill. $k - 1$ pontú konvex) ív megfelel. Ha mindkettő nagyobb, akkor tegyél egymás mellé egy konvex k–as és konkáv $l-1$–es nélküli $\binom{k+(l-1)-4}{k-2}$ pontú és egy konvex $k-1$–es és konkáv l–es nélküli $\binom{(k-1)+l-4}{(k-1)-2}$ pontú halmazt úgy, hogy az előbbi „balra fent”, az utóbbi „jobbra lent” legyen olyan nagy szintkülönbséggel, hogy a két halmaz egy-egy pontját összekötő szakaszok mind meredekebbek legyenek az egy–egy halmazon belüli pontpárok összekötő szakaszainál.

7.41. (i) azért igaz, mert az $\mathbf{e} = P_iP_j$ élt tekintve vagy az $\langle a(\mathbf{e}), b(\mathbf{e})\rangle$, vagy egy nála is jobb számpár benne van ugyan H_i–ben, mégsem szerepelhet sem ő, sem nála jobb H_j–ben. Ugyanis bármely P_j–ből induló $\mathbf{f}$ élre

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}) &\geq a(\mathbf{f}) + 1, \text{ ha } w(\mathbf{e}) \leq w(\mathbf{f}); \\ b(\mathbf{e}) &\geq b(\mathbf{f}) + 1, \text{ ha } w(\mathbf{e}) \geq w(\mathbf{f}). \end{aligned}$$

(ii) Nagyobb a–hoz kisebb b tartozik a párok maximalitása miatt.

7.42. Ha legfeljebb $k-2$ tagú növő és $l-2$ tagú csökkenő éllánc lenne, akkor minden $a(\mathbf{e})$ az $1, 2, \ldots, k-2$ és minden $b(\mathbf{e})$ az $1, 2, \ldots, l-2$ halmazból kerülne ki. A pontosan t számpárt tartalmazó H_i–k száma tehát az előző feladat (ii) része alapján legfeljebb $\binom{k-2}{t} \cdot \binom{l-2}{t}$ lehetne. Ezeket összegezve az összes lehetséges t–re, csak $\binom{k+l-4}{k-2}$ adódna a pontszámra.

7.44. Például

7	1	2
7	3	4
7	5	6
2	4	6
1	3	6
2	3	5
1	4	5

7.48. Vegyél egy általános helyzetű pontnégyest és használd az előző feladatot! (iii)–hoz tekints egy pontot és az összes, őt tartalmazó egyenest!

7.49. b) $q - 1$ eleműek és $(q^3 - 1)/(q - 1) = q^2 + q + 1$ darab van.

c) $q = 2$–re ez éppen egy–egy elemet jelent ekvivalencia–osztályonként; $q = 3$–ra viszont az osztályok párok.

7.64. $\binom{\sqrt{2n}}{2} = \frac{\sqrt{2n}(\sqrt{2n}-1)}{2} = \frac{2n-\sqrt{2n}}{2} = n - \sqrt{\frac{n}{2}} < n$, tehát a pontok által meghatározott egyenesek nem fedhetik az alaphalmazt.

7.73. Bármely $0 \leq k \leq n$–re a k elemű részek megfelelnek. Ezekből $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$–re ill. $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$–re (páros n esetén $\frac{n}{2}$–re) van a legtöbb. Többet lehet-e? Lásd később Sperner tételét!

7.77. Mivel $k! \cdot (n-k)! = n!/\binom{n}{k}$, ezért $\binom{n}{k}$–t kell maximalizálni. Ez a binomiális együttható pedig akkor a legnagyobb, ha $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ill. $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ (páros n esetén $\frac{n}{2}$)

7.78. A 6. feladat szerint az $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ elemű halmazokhoz párosíthatsz egy–egy, őket tartalmazó $\lfloor n/2 \rfloor$ eleműt; az $\lfloor n/2 \rfloor - 2$ –esekhez bővebb $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ –eseket; stb. Így épülnek a láncok a középső szintről lefelé. Ugyanez felfelé: $\lceil n/2 \rceil + 1$ –esekhez $\lceil n/2 \rceil$ –eseket, ..., $\lceil n/2 \rceil + i + 1$ eleműekhez $\lceil n/2 \rceil + i$ eleműeket, stb. Végül páratlan n esetén még a két középső szintet kell összepárosítanod; így a kívánt felbontást kapod.

7.79. a) A halmazok mindegyike legalább $\lfloor n/2 \rfloor! \cdot \lceil n/2 \rceil!$ teljes láncban szerepel és az összes ilyen lánc különböző. Így $m \cdot \lfloor n/2 \rfloor! \cdot \lceil n/2 \rceil! \leq n!$, amiből a kívánt egyenltlenség adódik. Egyenlőség csak akkor állhat, ha minden A_i pontosan $\lfloor n/2 \rfloor! \cdot \lceil n/2 \rceil!$ teljes láncnak eleme.

b) Minden láncban legfeljebb egy A_i lehet.

7.80. A két szintnek megfelelő páros gráf (él = tartalmazás) $\lceil n/2 \rceil$–reguláris: ennyiféleképpen hagyhatsz el egy elemet egy $\lceil n/2 \rceil$–esből és ennyiképpen vehetsz hozzá egyet egy $\lfloor n/2 \rfloor$–eshez. Ha k kisebb fajtát csak k nagyobb fajta tartalmazna, a páros gráf nem lehetne összefüggő. Ez azonban lehetetlen, mert elemcserékkel (egy–egy elem hozzávételével ill. elhagyásával) bármely halmazból bármely másikba eljuthatunk.

7.81. A 79a) feladatban láttuk, hogy páratlan n–re minden $|A_i| = \lfloor n/2 \rfloor$ vagy $\lceil n/2 \rceil$, páros n–re pedig mind $n/2$ elemű. Az előző feladat szerint páratlan n esetén maximális rendszerben nem keveredhet a két méret.

7.84. $k > n/2$ esetén lehet az összeset; $k \leq n/2$–re pedig például az összes olyat, amely az utolsó elemet tartalmazza: $\binom{n-1}{k-1}$ darabot. Többet lehet-e? Lásd az Erdős–Ko–Rado tételt.

7.85. $k > n/2$–re az összes, (i)–et teljesítő rész jó; ez n darab. $k \leq 2$ esetén legfeljebb k darabot lehet. Az $\{i, i+1, \ldots, i+k-1\}$ (mod n) halmazba ugyan $2(n-1)$ hasonló alakú másik metsz bele, de ezek közül a $\{j-k, j-k+1, \ldots, j-1\}$ (mod n) és $\{j, j+1, \ldots, j+k-1\}$ (mod n) típusú párokból (ii) miatt csak az egyik szerepelhet. Ez $1 + (k-1) = k$.

7.86. Szemléletesen: bármilyen sorrendben helyezzük is el az n elemet egy szabályos n–szög csúcsaiba, a 85. feladat szerint a keletkező n darab, szomszédos csúcsokból álló k–as közül csak k darab szerepelhet az A_i–k között, azaz legfeljebb $\frac{k}{n}$–ed részük. Így az összes (vagyis $\binom{n}{k}$ darab) k–asnak is csak legfeljebb $\frac{k}{n}$–ed része lehet köztük. De $\frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$.

Részletesen: tekintsük az n elem összes lehetséges elhelyezését az n–szög csúcsaiban! Minden sorrendre legfeljebb k darab A_i helyezkedhet el „hézagmentesen", szomszédos csúcsokon. Ez legfeljebb $k \cdot n!$ darab k elemű halmaz; persze mindet többször számoltuk. Hányszor? Egy A_i–t letehetünk az n hézagmentes rész bármelyikére $k!$ sorrendben; a maradékot a kimaradó helyre $(n-k)!$ sorrendben. Így $m \cdot n \cdot k! \cdot (n-k)! \leq k \cdot n!$, ahonnan $m \leq \binom{n-1}{k-1}$.

7.92. Nem. A taglétszámok persze páratlanra változnak, de két klub közös részének párossága is megszűnik, ha a polgármester tagja volt mindkettőnek (vagy egyiknek sem).

7.94. Harminckettőt. Ez éppen az összes lehetséges 31 tagú klub. Bármely kettőnek pontosan 30 közös tagja van.

7.97. Tegyük fel, hogy $\sum \lambda_i v_i = 0$, van $\lambda_i \neq 0$ és mindegyik racionális! (Ezt azért tehetjük fel, mert a Gauss–elimináció ilyeneket ad.) A közös nevezővel végigszorozva és a legnagyobb közös osztóval osztva lesz páratlan λ_j. Ekkor $\sum \lambda_i v_i v_j = 0$, és a bal oldalon sok páros mellett egyetlen páratlan tag áll — ellentmondás.

7.98. a) Az előző feladatban már használtuk, hogy ha **R** felett van nem-triviális lineáris kombinció, akkor van csupa racionáis is, tehát csupa egész is. Ami pedig egész számként 0–t ad, az mod 2 is.

Ajánlott irodalom

Bevezető

Andrásfai Béla: Gráfelmélet. Polygon könyvtár, 1997.

Hajnal Péter: Gráfelmélet. Polygon jegyzettár, 1997.

Hajnal Péter: Elemi kombinatorikai feladatok. Polygon könyvtár, 1997.

Hajnal Péter: Összeszámlálási problémák. Polygon jegyzettár, 1997.

Algoritmusok

Rónyai Lajos–Ivanyos Gábor–Szabó Réka: Algoritmusok. TypoTEX Kiadó, 1998. (Kitűnő bevezető)

Cormen–Leiserson–Rivest: Algoritmusok. (Monográfia) Műszaki Könyvkiadó, 1997.

Lineáris algebrai módszerek – sok geometriával.

László Babai – Péter Frankl: Linear Algebra Methods ... (Még nem jelent meg; fénymásolva terjed.)

Mély eredmények, feladatok formájában

Lovász László: Kombinatorikai problémák és feladatok. TypoTEX Kiadó, 1999. (A véges matematika legnevezetesebb — és legjobb — monográfiája.)

Kézikönyv

Handbook of combinatorics. Edited by R. L. Graham, M. Grötschel and L. Lovász. Elsevier Science B.V., Amsterdam; MIT Press, Cambridge, MA, 1995.